

THE BULLETIN OF THE

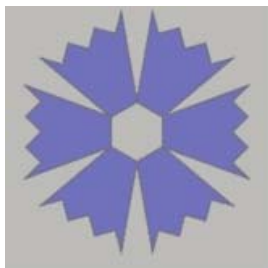


USER GROUP

+ CAS-TI

C o n t e n t s :

- | | |
|----|---|
| 1 | Letter of the Editor |
| 2 | Editorial - Preview |
| | David Sjöstrand (and JB) |
| 3 | The Proof |
| | Michel Beaudin |
| 21 | Devoir #2 |
| | Dietmar Oertel |
| 26 | Structured Combinatorics |
| 30 | TIME 2010 - The Proceedings |
| | Piotr Trebisz |
| 32 | Ein mathematisches Modell für Schneckenhäuser (2) |
| | A Mathematical Model for Snail Shells (2) |



Visit the website of TIME 2012

<http://time2012.ut.ee/>

The conference will be held on July 10-14, 2012 in Tartu, Estonia

Fortunately four excellent experts have accepted our invitation to give an invited lecture:

Bill Bauldry, USA (*CAS in the Classroom: Yesterday, Today, and Tomorrow*)

Djordje Kadijevich, Serbia (*Critical issues of effective CAS utilization*)

Walter Wegscheider, Austria (*Development of pedagogical tools for teaching mathematics – from the PC Lab to Smartphone*)

José Luis Galan, Spain (*From Vienna to Tartu: A 10 Years Tour using Derive in TIME*)

Additionally we are expecting an Estonian speaker, too

Marina Lepp, Eno Tõnisson, Josef Böhm (Co-Chairs of TIME 2012)

(The cornflower = bluebottle is the national flower of Estonia, its picture is CAS-made!)

I'd like to invite you reading my address at the occasion of 20 years TIME-Conferences. You will find it on the TIME 2012 website, Josef.

Some interesting links (most of them provided by Michael de Villiers, SA)

<http://math.pppst.com/problemsolving.html>

<http://www.gedcat.com/>

<http://www.lettredelapreuve.it/>

<http://www.scribd.com/doc/18935265/Geometry-Unbound>

<http://www.pdfbe.com/po/polynome-book.pdf>

This is a collection of talks given at several “Didactic Days” of the Austrian Mathematical Society (in German):

<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/>

The next two links are leading to (German) papers which deal with linear difference equations (David Sjöstrand's Proof):

http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2009_Band_42/VortragPauer.pdf

<http://homepage.univie.ac.at/david.wozabal/ws2004/diffgl.pdf>

Liebe DUG-Mitglieder,
nach vielen Problemen mit meinem Notebook und dem PC - Crash für das erstere und Speicherprobleme mit dem zweiten - kann ich Ihnen endlich den neuen DNL#82 vorlegen.

Ziemlich gleichzeitig ist auch die neue Version des DNL#26 fertig geworden. Beide Newsletter waren sehr arbeitsintensiv. Während im „26er“ die Anpassung einiger DERIVE-Routinen an die Version 6 manchmal einiges Kopfzerbrechen bereitete, war es in der aktuellen Nummer 82 die Übersetzungsarbeit für die Beiträge von D. Oertel und P. Trebisz.

Ich schätze sehr die genauen Erläuterungen von P. Trebisz und danke für seine Bemühungen. Mit Herrn Oertel pflege ich nun seit längerer Zeit einen angeregten Briefwechsel und verfolge seine interessanten unkonventionellen Ideen, die er uns im Lauf der nächsten DNLs auch näher bringen wird

David Sjöstrand verdanke ich eine weitere sehr intensive Beschäftigung mit dem „Proof“ aus einem früheren DNL.

Ich freue mich auch, hier wieder einen Beitrag von Michel Beaudin in seiner Muttersprache Französisch veröffentlichen zu können. Michel hat - angeregt von Albert Rich's RUBI (Rule Based Integration) - seinen Unterricht hinsichtlich Integration wesentlich verändert. Er hat darüber einen spannenden Vortrag im Rahmen der ACA11 in Houston gehalten - den wir möglicherweise auch hier im DNL werden veröffentlichen dürfen.

Beachten Sie bitte die Hinweise auf TIME 2012 sowie die website zum Download der TIME 2010 Proceedings (Seite 30). José Luis Galan, Gabriel Aguilera und Pedro Rodríguez haben auch hier einen perfekten Job hingelegt. ¡Muchas Gracias, amigos!

Dear DUG Members,
after a lot of problems with my laptop and my PC - the laptop crashed and the PC demonstrated its memory problems - I am glad to present the DNL#82.

Pretty to the same time the revised version of DNL#26 was ready. Both newsletters needed a lot of work. In DNL#26 it was the adaptation of some DERIVE functions on DERIVE 6 and in DNL#82 much time was spent for translating the contributions of D. Oertel and P. Trebisz.

I appreciate very much the accurate explications of P. Trebisz. I am very grateful for his efforts making his work understandable for us. D. Oertel and I have been enjoying an interesting exchange of mails since several months. I am following his unconventional ideas which he will present in the next DNLs.

I owe David Sjöstrand another very intensive activity in connection with "The Proof" from an earlier DNL.

I am glad to present a contribution from Michel Beaudin in his mother tongue. Michel has - inspired by Albert Rich's RUBI (Rule Based Integration) - changed his teaching of integration. He gave an exciting lecture about his point of view at ACA11 in Houston just recently. I hope that we can publish his paper in one of the next DNLs.

Please notice the remarks wrt TIME 2012 and the website for downloading the Proceedings of TIME 2010 (page 30). José Luis Galan, Gabriel Aguilera and Pedro Rodríguez did an excellent job. ¡Muchas Gracias, amigos!



Download all DNL-DERIVE- and TI-files from

<http://www.austromath.at/dug/>

The *DERIVE-NEWSLETTER* is the Bulletin of the *DERIVE & CAS-TI User Group*. It is published at least four times a year with a contents of 40 pages minimum. The goals of the *DNL* are to enable the exchange of experiences made with *DERIVE*, *TI-CAS* and other CAS as well to create a group to discuss the possibilities of new methodical and didactical manners in teaching mathematics.

Editor: Mag. Josef Böhm
D'Lust 1, A-3042 Würmla
Austria
Phone: ++43-(0)660 3136365
e-mail: nojo.boehm@pgv.at

Contributions:

Please send all contributions to the Editor. Non-English speakers are encouraged to write their contributions in English to reinforce the international touch of the *DNL*. It must be said, though, that non-English articles will be warmly welcomed nonetheless. Your contributions will be edited but not assessed. By submitting articles the author gives his consent for reprinting it in the *DNL*. The more contributions you will send, the more lively and richer in contents the *DERIVE & CAS-TI Newsletter* will be.

Next issue: September 2011

Preview: Contributions waiting to be published

Some simulations of Random Experiments, J. Böhm, AUT, Lorenz Kopp, GER
Wonderful World of Pedal Curves, J. Böhm, AUT
Tools for 3D-Problems, P. Lüke-Rosendahl, GER
Hill-Encryption, J. Böhm, AUT
Simulating a Graphing Calculator in *DERIVE*, J. Böhm, AUT
Do you know this? Cabri & CAS on PC and Handheld, W. Wegscheider, AUT
An Interesting Problem with a Triangle, Steiner Point, P. Lüke-Rosendahl, GER
Overcoming Branch & Bound by Simulation, J. Böhm, AUT
Graphics World, Currency Change, P. Charland, CAN
Cubics, Quartics – Interesting features, T. Koller & J. Böhm, AUT
Logos of Companies as an Inspiration for Math Teaching
Exciting Surfaces in the FAZ / Pierre Charland's Graphics Gallery
BooleanPlots.mth, P. Schofield, UK
Old traditional examples for a CAS – what's new? J. Böhm, AUT
Truth Tables on the TI, M. R. Phillips, USA
Where oh Where is It? (GPS with CAS), C. & P. Leinbach, USA
Embroidery Patterns, H. Ludwig, GER
Mandelbrot and Newton with *DERIVE*, Roman Hašek, CZ & Rob Gough, UK
A Conics-Explorer, J. Böhm, AUT
Tutorials for the NSpireCAS, G. Herweyers, BEL
Some Projects with Students, R. Schröder, GER
Dirac Algebra, Clifford Algebra, D. R. Lunsford, USA
Treating Differential Equations (M. Beaudin, G. Piccard, Ch. Trottier), CAN
A New Approach to Taylor Series, D. Oertel, GER
Statistics with TI-Nspire, G. Herweyers, BEL
Cesar Multiplication, G. Schödl, AUT
Henon & Co; Find your very own Strange Attractor, J. Böhm, AUT
Airplane Wings and Conformal Mapping, K. Körner, GER
Rational Hooks, J. Lechner, AUT
Conics with TI-Nspire, W. Pröpper, GER
and others

Impressum:
Medieninhaber: *DERIVE* User Group, A-3042 Würmla, D'Lust 1, AUSTRIA
Richtung: Fachzeitschrift
Herausgeber: Mag. Josef Böhm

This is the result of an inspiring exchange of emails between David and me and kept both of us busy for a while. Many thanks David for this exciting investigation, Josef

The Proof, David Sjöstrand's Contribution

I received an email from David Sjöstrand (31 January 2011)

Dear Josef,

after only having had a short glance at your and Carl's paper in DNL #80 I couldn't resist investigating some more sequences with Excel. (I shouldn't have done this. I have so many things I must do.)

It seems that the sequence $P(n)=m \cdot P(n-3) + (1-m) \cdot P(n-2)$ is convergent for all m and all initial conditions.

I attach josef_carl.xls.

Best regards,
David

	A	B	C	D	E	F
1	$P_n = mP_{n-3} + (1-m)P_{n-2}$					
2						
3						
4	34	73			m	1-m
5	5	3				0,2 0,8
6	100	-36				
7	10,8	17			50,8181818	-8,3636
8	81	-28,2			50,8181818	-8,3636
9	28,64	6,4			50,8181818	-8,3636
10	66,96	-19,16			50,8181818	-8,3636
11	39,112	-0,52			50,8181818	-8,3636
12	59,296	-14,048			50,8181818	-8,3636
13	44,6816	-4,248		initial values	50,8181818	-8,3636
14	55,2592	-11,342			50,8181818	-8,3636
15	47,6045	-6,208			50,8181818	-8,3636
16	53,1437	-9,9235			50,8181818	-8,3636
17	49,1354	-7,2349			50,8181818	-8,3636

Josef_carl.xls

My answer was (1 February):

Dear David,

thanks for this. It is an interesting idea. I reproduced your sequence(s) with DERIVE and wondered about the locus of the final (= limit) points with the first three points given and $0 \leq m \leq 1$.

I introduced a slider bar for m and plotted the 20th points of the sequences with an increment of 0.05 for m - interesting. I will proceed investigating this.

Some days later another mail arrived (2 February):

Dear Carl and Josef,

thank you again for an interesting paper, *J. Böhm & C. L. Leinbach: Using Rational Arithmetic...*

I think that I have a solution to the challenge on page 22. I attach some thoughts.

$$\text{Let } \begin{cases} P_1 = [a_1, b_1] \\ P_2 = [a_2, b_2] \\ P_3 = [a_3, b_3] \\ P_n = (x_n, y_n) = mP_{n-2} + mP_{n-3}, n > 3 \end{cases}$$

I am almost sure that I can prove that

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{5} [a_1 + 2a_2 + 2a_3, b_1 + 2b_2 + 2b_3]$$

using the theory of linear homogenous difference (recurrence) equations.

It is easy to prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$ or P_n is not convergent if $m \neq \frac{1}{2}$

Here is a happy, but very, very tired grandfather and two granddaughters, Josefine's daughters Cecilia and Emma.



Best regards,
David

From: Yvonne Fogelander-Sjöstrand <yvonne@ydsa.se>

Datum: Thu, 3 Feb 2011 21:29:58 +0100

Dear Josef and Carl,

please find enclosed what I believe are proofs of the assertions I made in my last mail.

Best regards,
David

$$\text{Let } \begin{cases} P_1 = [a_1, b_1] \\ P_2 = [a_2, b_2] \\ P_3 = [a_3, b_3] \\ P_n = (x_n, y_n) = mP_{n-2} + mP_{n-3}, n > 3 \end{cases} \quad (1)$$

I am almost sure that I can prove that

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{5} [a_1 + 2a_2 + 2a_3, b_1 + 2b_2 + 2b_3] \quad (2)$$

using the theory of linear homogenous difference (recurrence) equations.

$$\text{It is easy to prove that } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0 \text{ or } P_n \text{ is not convergent if } m \neq \frac{1}{2} \quad (3)$$

A difference equation, $x_n + ax_{n-1} + bx_{n-2} + cx_{n-3} = 0$, has the general solution

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n + Cr_3^n,$$

A, B and C are arbitrary constants, where r_1, r_2, r_3 are the roots of the characteristic equation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

(1) gives us 2 difference equations

$$x_n - mx_{n-2} - mx_{n-3} = 0, \quad x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 \text{ and } x_3 = a_3 \quad (4)$$

and

$$y_n - my_{n-2} - my_{n-3} = 0, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2 \text{ and } y_3 = b_3 \quad (5)$$

$$\text{I. } m = \frac{1}{2}$$

$$(4) \text{ gives us } x_n - \frac{1}{2}x_{n-2} - \frac{1}{2}x_{n-3} = 0, \quad x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 \text{ and } x_3 = a_3 \quad (6)$$

The characteristic equation $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ has the roots $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ and $r_3 = 1$.

The general solution is $x_n = Ar_1^n + Br_2^n + C$. Since $|r_1| < 1$ and $|r_2| < 1$ we can conclude that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$. The initial condition $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ and $x_3 = a_3$ gives us a possibility to find C .

We find that $C = \frac{a_1 + 2a_2 + 2a_3}{5}$. Since we can do the same with the sequence y_n , (2) is proved.

$$\text{II. } m \neq \frac{1}{2}.$$

Suppose that the sequence x_n is convergent and that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Then $x - mx - mx = 0$ which gives us $(1 - 2m)x = 0 \Rightarrow x = 0$ since $(1 - 2m) \neq 0$. Thus (3) is proved.

p 6	David Sjöstrand (and JB): The Proof	D-N-L#82
------------	-------------------------------------	-----------------

From: nojo.boehm@pgv.at
Sent: Friday, February 04, 2011 9:27 AM

Dear David,
dear Carl,

Thanks for this elegant proof. If we had known this prior to TIME 2010 our talk would have lasted only a few minutes.

I attach a DERIVE file dealing with your sequence from your last mail:

$$P(n) = m \cdot P(n-3) + (1-m) \cdot P(n-2).$$

I started investigating the locus of the limit points for $0 \leq m \leq 1$ for any initial triple of points.

Best regards to you all,
Noor and Josef (still skiing in Hinterstoder = www.hiwu.at)

```
#1:  Branch := Real
      ptsm(ini, m, n, pt) :=
      Prog
        pt := ini
        k := 4
#2:  Loop
      If k > n
        RETURN pt
      pt := APPEND(pt, [m*pt↓(k - 3) + (1 - m)*pt↓(k - 2)])
      k :=+ 1
```

These are the first 10 points of your example sequence:

$$\#3: \quad \text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 34 & 73 \\ 5 & 3 \\ 100 & -36 \end{bmatrix}, 0.2, 10 \right)$$

$$\#4: \quad \begin{bmatrix} 34 & 73 \\ 5 & 3 \\ 100 & -36 \\ 10.8 & 17 \\ 81 & -28.2 \\ 28.64 & 6.4 \\ 66.96 & -19.16 \\ 39.112 & -0.52 \\ 59.296 & -14.048 \\ 44.6816 & -4.248 \end{bmatrix}$$

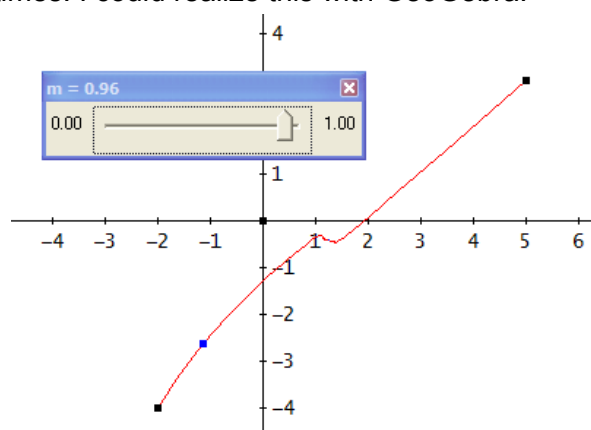
I am trying to plot an approximation of the locus of all "final" points (taking point #30 of each sequence) with m – which is k in the expression below – running from 0 to 1 with an increment of 0.02.

$$\#5: \text{VECTOR} \left(\left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, k, 50 \right) \right)_{30}, k, 0, 1, 0.02 \right)$$

Inserting a slider for m with $0 \leq m \leq 1$ (50 steps) I can observe the approximated limit point walking on the "locus".

$$\#6: \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, m, 50 \right) \right)_{30}$$

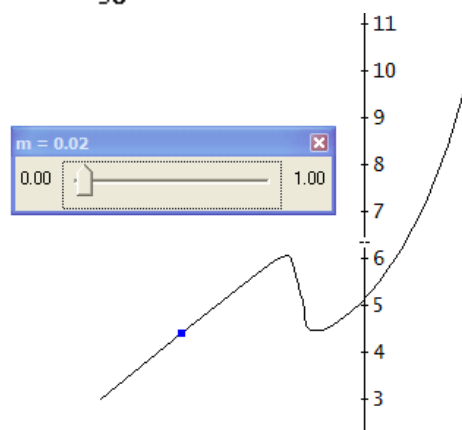
Then I tried to insert sliders for the coordinates of the initial points. This didn't work because of too long calculation times. I could realize this with GeoGebra.



Another example

$$\#7: \text{VECTOR} \left(\left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, k, 50 \right) \right)_{30}, k, 0, 1, 0.02 \right)$$

$$\#8: \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, m, 50 \right) \right)_{30}$$



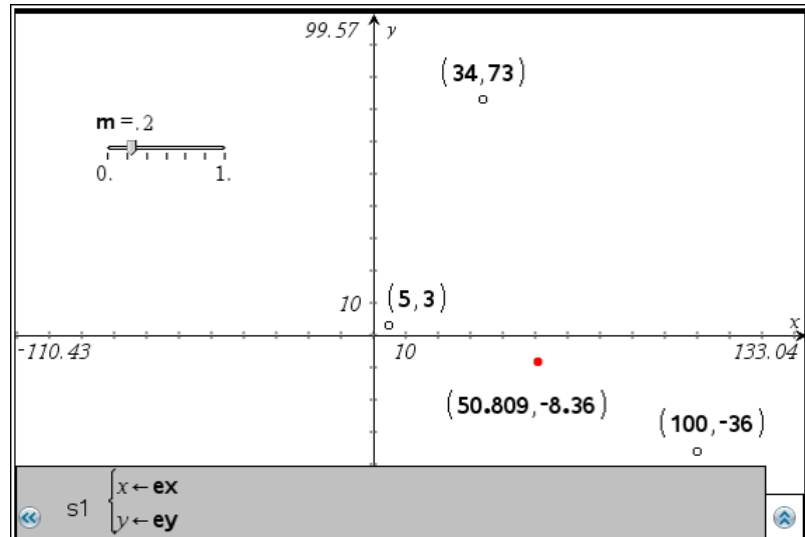
We obtain a similar graph.

My next question is: What is the locus of the points?

I wrote that I could not realize moveable initial points with DERIVE. But I could do this with TI-NspireCAS (version 3).

First of all I generated three points (the initial points of the sequence). The coordinates of the points must be defined as variables. After this I implemented a slider for m .

You cannot see the red point – which is the 50th element of the sequence – at this moment.



I transferred the coordinates into the spreadsheet and created the first 50 points of the sequence.

	A	B	C
46	50.8181	-8.3636	
47	50.8182	-8.36366	
48	50.8182	-8.36362	
49	50.8182	-8.36365	
50	50.8087	-8.35726	

	A	B	C	D	E	F	G
1	34	73					
2	5	3					
3	100	-36					
4	10.8	17.					
5	81.	-28.2					
6	28.64	6.4					
7	66.96	-19.16					
8	39.112	-0.52					
9	59.296	-14.048					
10	44.6816	-4.248					
11	55.2592	-11.3424					
A4	$=m \cdot a1 + (1-m) \cdot a2$						

Please compare the values with the Excel- and the DERIVE results.

The coordinates of the 50th point are made to variables, and these variables are used to plot the red point in the Graphs Application.

Moving the slider one can observe the path of the “limit point” for a given set of initial points. You can also drag the points.

From: David Sjöstrand [david@ydsa.se]

Datum: Sat, 5 Feb 2011 17:51+0100

Dear Josef,
dear Carl,

I have worked a little bit more trying to find the locus that Josef is looking for. I think that it always is a line segment. I attach two files.

The first of David's files was an appendix to his proof from page 5.

$$\begin{cases} P_1 = [a_1, b_1] \\ P_2 = [a_2, b_2] \\ P_3 = [a_3, b_3] \\ P_n = (x_n, y_n) = (1-m)P_{n-2} + mP_{n-3}, n > 3 \end{cases}$$

We get two difference equations

$$x_n - (1-m)x_{n-2} - mx_{n-3} = 0, \quad x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 \quad \text{and} \quad x_3 = a_3 \quad (7)$$

and

$$y_n - my_{n-2} - my_{n-3} = 0, \quad y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2 \quad \text{and} \quad y_3 = b_3 \quad (8)$$

(7) has the solution the general solution is $x_n = Ar_1^n + Br_2^n + C$. Since $|r_1| < 1$ and $|r_2| < 1$ we can conclude that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$. The initial condition $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ and $x_3 = a_3$ gives us a possibility to find C .

The expression of C is called $x(a_1, a_2, a_3, m)$. You will find it in #10 in the attached dfw-file.

$x(b_1, b_2, b_3, m)$ is the solution of (8)

Therefore $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = [x(a_1, a_2, a_3, m), x(b_1, b_2, b_3, m)]$.

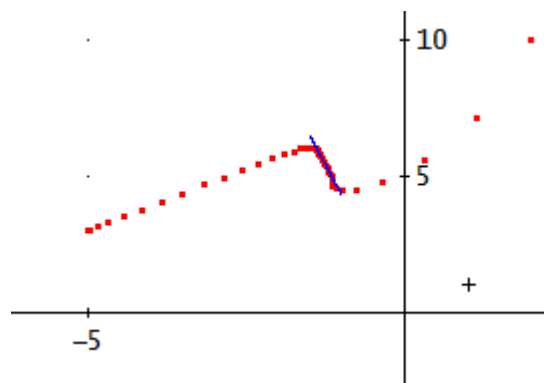
I feel very confident that P_n converge if and only if $0 < m < 1$.

Now we can plot for example $[x(0, -5, 2, m), x(0, 3, 10, m)], 0 < m < 1$.

I have made this plot in Josef plot of

$$\text{VECTOR} \left(\left(\text{ptsm2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, k, 50 \right) \right), k, 0, 1, 0.02 \right)$$

Here is the result



Josef's red and my blue coincide quite well on a small interval. I think that the difference can be explained by thinking of that Josef's approximations for m -values close to 0 and 1 are too bad.

The blue graph indicates that the graph is a line segment. This is true because if you simplify

p 10	David Sjöstrand (and JB): The Proof	D-N-L#82
-------------	--	-----------------

$[x(0, -5, 2, m), x(0, 3, 10, m)]$, you receive , $\left[-\frac{3}{m+2}, \frac{13}{m+2} \right]$ which is the straight line $y = -\frac{13}{3}x$.

I think that $[x(a_1, a_2, a_3, m), x(b_1, b_2, b_3, m)]$ always is a straight line.

Thus my belief is that the locus that Josef is looking for is a line segment for all m between 0 and 1.

This is expression #10 and its simplification to give the straight line:

#10: $x(a_1, a_2, a_3, m) :=$

$$\frac{(\sqrt{(1-4m)}-1) \cdot (a_1 \cdot (1-4m)^{3/2} \cdot (2m-1) - \sqrt{(1-4m)} \cdot (a_1 \cdot (6m-1) + 8m \cdot (a_2 + a_3)) - 8m \cdot (a_1 m + a_2 + a_3))}{32m^2 \cdot (m+2)}$$

#11: $[x(0, -5, 2, m), x(0, 3, 10, m)]$

#12: $\left[-\frac{3}{m+2}, \frac{13}{m+2} \right]$

Von: Josef Böhm [nojo.boehm@pgv.at]
Gesendet: Sonntag, 6. Februar 2011 11:25

Dear friends,

This is an interesting dialogue, isn't it.

Learning from David's approach using the difference equations I came to the same result today in the morning.

My simplified function $x(a_1, a_2, a_3, m)$ is much more compact (seems to be identical, because the line segment is pretty the same).

(expression #21 in the DERIVE file on page 13)

I attach the respective file including my first thoughts (and failures!!)

Best regards

Josef

(I skip printing some expressions of the next DERIVE session, this was presented earlier – on page 6.)

```

#1:  [Branch := Real, InputMode := Word]

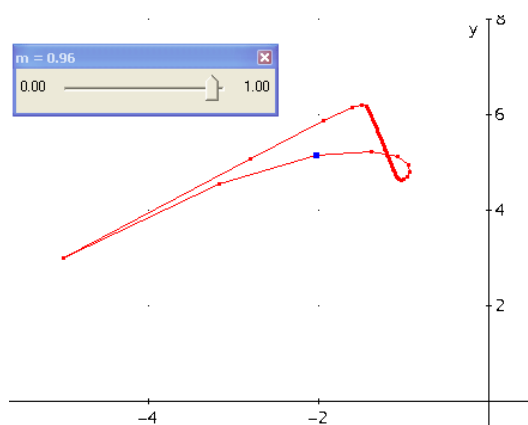
      ptsm(ini, m, n, pt) :=
      Prog
        pt := ini
        k := 4
#2:  Loop
      If k > n
        RETURN pt
      pt := APPEND(pt, [m·pt↓(k - 3) + (1 - m)·pt↓(k - 2)])
      k :=+ 1

```

I take another set of initial points and want to approximate the locus of the "final points" (= limits of the sequence). My approximation is the set of the 50th points:

$$\#5: \text{VECTOR} \left(\left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, k, 50 \right) \right)_{50}, k, 0, 1, 0.02 \right)$$

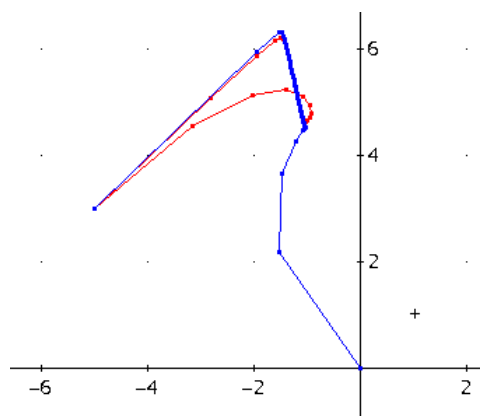
I added the slider (see also page 6) and proceeded:



My first impression: the locus is a closed curve!

I add the set of the 100th points of the sequence on the same axes:

$$\#7: \text{VECTOR} \left(\left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, k, 100 \right) \right)_{100}, k, 0, 1, 0.02 \right)$$



This looks quite different; I get the impression of a very slow convergence.

Compare the following results:

Look at pts#30, 40 and 50:

$$\#8: \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, 0.02, 50 \right) \right)_{[30, 40, 50]} = \begin{bmatrix} -3.482470725 & 4.391027040 \\ -3.110177842 & 4.772135395 \\ -2.807278865 & 5.082206674 \end{bmatrix}$$

pts#98,99,100

$$\#9: \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, 0.02, 100 \right) \right)_{[98, 99, 100]} = \begin{bmatrix} -1.976347000 & 5.932814058 \\ -1.003978754 & 6.928206876 \\ -1.956494305 & 5.953136842 \end{bmatrix}$$

And finally:

pts# 999, 1000 and 1001

$$\#10: \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, 0.02, 1001 \right) \right)_{[999, 1000, 1001]} = \begin{bmatrix} -1.485148507 & 6.435643575 \\ -1.485148522 & 6.435643553 \\ -1.485148507 & 6.435643575 \end{bmatrix}$$

I try switching from numerical approximation to pure mathematics!!

I follow David's explanations about difference equations and try to generalize the problem.

Given difference equation: $x(n) = m \cdot x(n-3) + (1-m) \cdot x(n-2)$

$x(n) - (1-m) \cdot x(n-2) - m \cdot x(n-3) = 0$ = in general: $x(n) + a \cdot x(n-1) + b \cdot x(n-2) + c \cdot x(n-3)$

General solution: $x(n) = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n + C \cdot r_3^n$

with r_1, r_2, r_3 = roots of the characteristic equation: $x^3 + a x^2 + b x + c$.

$$\#11: \text{SOLUTIONS}(x^3 - (1-m) \cdot x - m = 0, x)$$

$$\#12: \left[1, -\frac{\sqrt{(1-4 \cdot m)} + 1}{2}, \frac{\sqrt{(1-4 \cdot m)} - 1}{2} \right]$$

$$\#13: x_{-}(n) := a \cdot 1^n + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{(1-4 \cdot m)} + 1}{2} \right)^n + c \cdot \left(\frac{\sqrt{(1-4 \cdot m)} - 1}{2} \right)^n$$

$$\#14: m \in \text{Real } (0, 1)$$

$$\#15: \lim_{n \rightarrow \infty} x_{-}(n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \cdot (b \cdot (-\sqrt{(1-4 \cdot m)} - 1)^n + c \cdot (\sqrt{(1-4 \cdot m)} - 1)^n) \right) + a$$

$$\#16: m \in \text{Real } [0, 1/4]$$

$$\#17: \lim_{n \rightarrow \infty} x_{-}(n) = a$$

I am going to find the coefficients now.

```
#18: cfs := (SOLUTIONS(x_(1) = a1 ^ x_(2) = a2 ^ x_(3) = a3, [a, b, c]))
1
```

This simplifies to a huge and bulky expression with solutions for a, b, and c. To give an impression I print the first element of the solution vector which is a – and this should be the C in David's paper.

```
#19: cfs :=
```

$$\frac{\left((1-4m)^{5/2} \cdot (a1 \cdot (2m^3 + 2m - 1) - 2a2m^2 \cdot (m+2) + a3 \cdot (4m^2 - 2m + 1)) + (1-4m)^{3/2} \cdot (a1 \cdot (8m^4 - 2m^3 + 8m^2 - 6m + 1) + 2a2m^2 \cdot (m+2) \cdot (1-4m) + a3 \cdot (16m^3 - 12m^2 + 6m - 1)) + 32m^2 \cdot (m+2) \cdot (1-4m) \cdot (a1m + a2 + a3) \right)}{2 \cdot (1-4m)^2}$$

But to my big surprise when I selected the first element and simplified, then I received a very short and compact expression.

```
#20: cfs
1
```

```
#21: a1*m + a2 + a3
      m + 2
```

```
#22: co(a1, a2, a3, m) := a1*m + a2 + a3
                        m + 2
```

I defined a function depending on the first three coordinates and m and then tried this function on sequences from above.

```
#23: [co(34, 5, 100, 0.2), co(73, 3, -36, 0.2)] = [ 559/11, - 92/11 ]
```

```
#24: [co(34, 5, 100, 0.2), co(73, 3, -36, 0.2)] = [50.81818181, -8.363636363]
```

Compare the next one with expression #10:

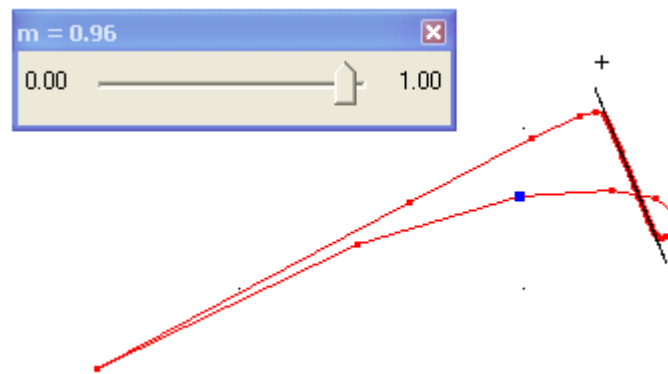
```
#26: [co(0, -5, 2, 0.02), co(0, 3, 10, 0.02)] = [-1.485148514, 6.435643564]
```

I add the line segment to the plot from above:

```
#27: [co(0, -5, 2, t), co(0, 3, 10, t)]
```

This is the line in explicit form:

```
#29: y = (x * (2*b1 - b2 - b3) + a1*(b2 + b3) - b1*(a2 + a3)) / (2*a1 - a2 - a3)
```



#30: $\text{locus}(\text{ini}, t) := \left[\text{co}(\text{ini}_{1,1}, \text{ini}_{2,1}, \text{ini}_{3,1}, t), \text{co}(\text{ini}_{1,2}, \text{ini}_{2,2}, \text{ini}_{3,2}, t) \right]$

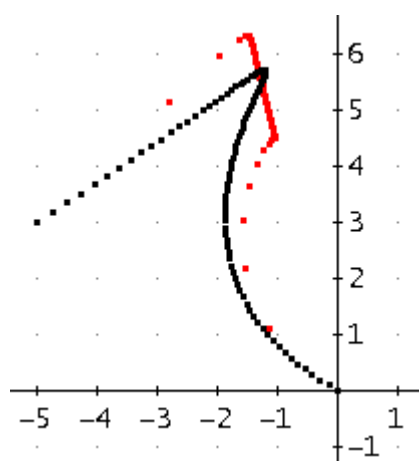
#31: $\text{locus} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, 0.02 \right) = \left[-\frac{150}{101}, \frac{650}{101} \right]$

#32: $\text{locus} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \right)$

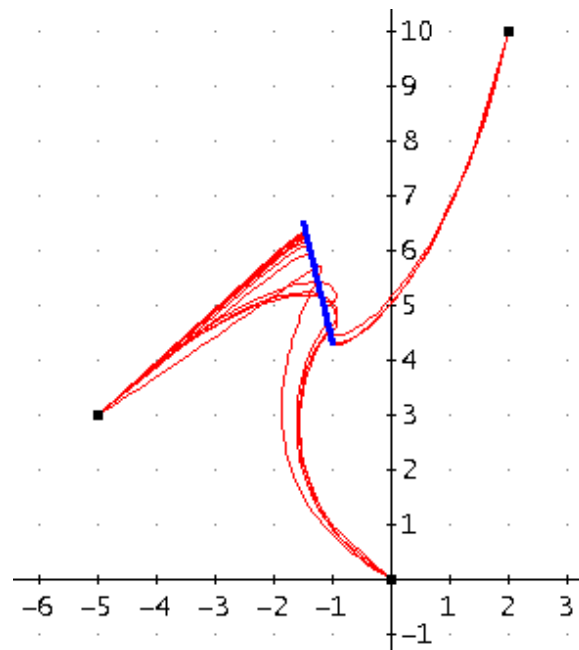
Function $\text{locus}(\text{ini}, m)$ returns the limit point to a given m . If you don't enter a value for m then you can plot the locus in parameter form with $0 \leq t \leq 1$.

#33: $\text{VECTOR} \left(\text{VECTOR} \left(\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}, k, j \right), k, 0, 1, 0.01 \right), j, 10, 100, 10 \right)$

The next graph shows #32 (the locus) and #33 which are the approximations of the locus starting with the locus of the 10th points of the sequence (black) and the 100th points of them varying m between 0 and 1 in 0.01-steps (red):

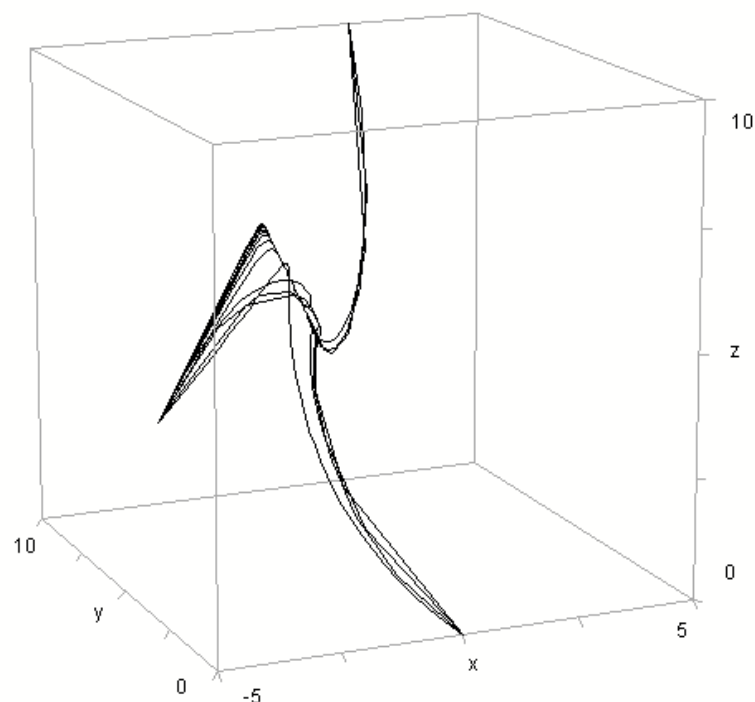


Here are all approximations at together on the same axes (#32 and #33).

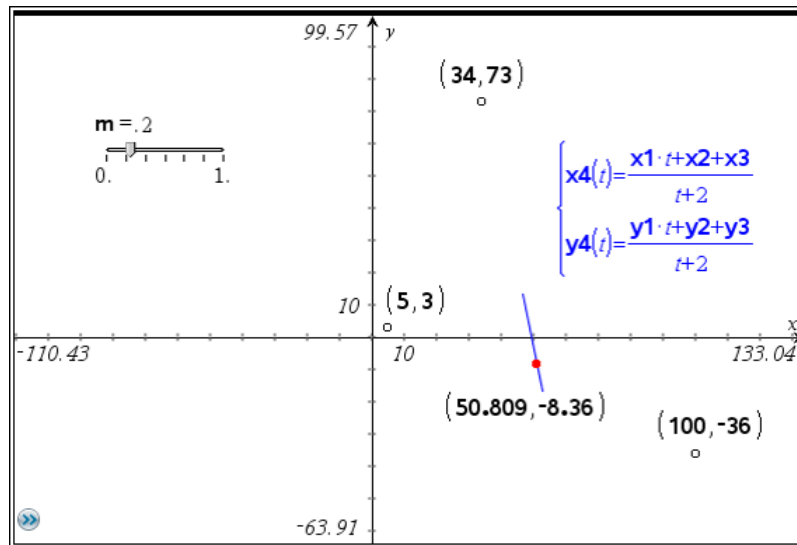


Let's have a jump into the 3rd dimension:

$$\text{VECTOR} \left(\left[\text{VECTOR} \left(\left[\text{ptsm} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 10 \end{bmatrix}, k, j \right), k, 0, 1, 0.02 \right], j, 10, 100, 10 \right) \right] \right)$$



Knowing the locus we can add it to our TI-Nspire realization:



The email communication went on:

Von: David Sjöstrand [david@ydsa.se]
Gesendet: Sonntag, 6. Februar 2011 23:21

Hi,

yes our correspondence is very interesting and stimulating.

1. Josef's expression #21 proves that the locus always is a line segment.
2. It is a little bit odd that Josef's expression #20 simplifies to the very compact and simple #21 when you don't get this already in the first component in the vector in #19 and when I don't get this simple expression at all. I have seen before that sometimes you have to let Derive simplify in two steps to get the simplest result.
3. $x(a_1, a_2, a_3)$ - #21 simplifies to 0 so they are identical.
4. Josef's approximative curves are in a way more interesting than the correct line segments.
5. It might be possible to go on with sequences of the type $x(n) = a \cdot x(n-1) + b \cdot x(n-2) + c \cdot x(n-3)$, where $a + b + c = 1$.

And here is David again:

Von: David Sjöstrand [david@ydsa.se]
Gesendet: Sonntag, 13. Februar 2011 21:04

Dear Josef,

I have spent some more time with convergent sequences defined by difference equations.

Please, look at the attached files (convergent sequences.xls & convergent sequences.doc).

Best regards,
David

d numbers, x_1, x_2, \dots, x_d are given.

d numbers, a_1, a_2, \dots, a_d are given.

Convergent Sequences

A sequence x_n is defined as follows.

$$x_{n+d+1} = a_d x_{n+d} + a_{d-1} x_{n+d-1} + \dots + a_1 x_{n+1} \text{ if } n > 0.$$

The following proposition might be true. (I have an incomplete proof.)

If $\sum_{n=1}^d a_n = 1$ then the sequence x_n is convergent with the limit $\sum_{i=1}^d b_i x_i$, where $b_i = \frac{\sum_{l=1}^i a_l}{\sum_{l=1}^d \left(\sum_{k=1}^l a_k \right)}$.

I have tested this in the attached xls-file for the case $d = 5$.

This is a part of David's Excel file:

x_1	7	a_1	0,14	s_1	0,14	
x_2	2	a_2	0,12	s_2	0,26	
x_3	-3	a_3	-0,23	s_3	0,03	
x_4	1	a_4	0,16	s_4	0,19	
x_5	5	a_5	0,81	s_5	1	
	6,12					
	5,4472			S	1,62	
	3,941432					
	3,396512			b_1	0,08642	4,074074
	3,563348			b_2	0,160494	4,074074
	4,033688			b_3	0,018519	4,074074
	4,291805			b_4	0,117284	4,074074
	4,261564			b_5	0,617284	4,074074
	4,113921					4,074074
	4,009922					4,074074
	4,005838					

Von: Josef Böhm [nojo.boehm@pgv.at]
Gesendet: Montag, 14. Februar 2011 20:45

Hi David,

many thanks for this great idea. I am also working on some details and will come back to you as soon as possible.

Best regards for the moment,

Noor and Josef

p 18	David Sjöstrand (and JB): The Proof	D-N-L#82
-------------	--	-----------------

From: Josef Böhm
Sent: Wednesday, March 02, 2011 10:39 AM

Dear David,

I attach two - long promised - DERIVE files connected with your findings.

One comment to your paper: I believe that your definition of the sequence (4th line in the doc) should be changed to $n \geq 0$ instead of only $n > 0$?

Best regards
Josef

```
#1:  InputMode := Word

      ptsn(ini, a1, a2, n, pt) :=
        Prog
          pt := ini
          k := 4
#2:    Loop
          If k > n
            RETURN pt
          pt := APPEND(pt, [a1*pt↓(k - 1) + a2*pt↓(k - 2) + (1 - a1 - a2)*pt↓(k - 3)])
          k := k + 1
```

$$\#3: \left(\text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, 0.5, 0.3, 50 \right) \right)_{[48, 49, 50]} = \begin{bmatrix} 0.4117647058 & 5.058823529 \\ 0.4117647058 & 5.058823529 \\ 0.4117647058 & 5.058823529 \end{bmatrix}$$

```
#4:  SOLUTIONS(x^3 - a1*x^2 - a2*x - (1 - a1 - a2) = 0, x)
```

$$\#5: \left[1, \frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) + a1 - 1}}{2}, -\frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) - a1 + 1}}{2} \right]$$

$$\#6: f(n, a1, a2) := b1 \cdot 1^n + b2 \cdot \left(\frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) + a1 - 1}}{2} \right)^n + b3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) - a1 + 1}}{2} \right)^n$$

```
#7:  coefs(a1, a2) := (SOLUTIONS(F(1) = x1 ^ f(2) = x2 ^ f(3) = x3, [b1, b2, b3]))_1
```

```
#8:  coefs(a1, a2) :=
```

$$\left[\frac{(a1 \cdot (x1 + x2) + a2 \cdot x1 - x1 - x2 - x3) \cdot (\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3)} \cdot (a1^3 - a1^2 + 3 \cdot a1 \cdot (a2 - 1) - 5 \cdot a2 + 3) + a1^4 + a1^3 \cdot \sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3)} \cdot (2 \cdot a1 + a2 - 3) \cdot ((a1^2 - 2 \cdot a1 + a2 + 1) \cdot \sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3)} + a1^3 \cdot \sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3)}))}{1 \cdot (5 \cdot a2 - 6) + a1 \cdot (8 - 6 \cdot a2) + 4 \cdot a2^2 + a2 - 3)}, -\frac{a1^2 + 3 \cdot a1 \cdot (a2 - 1) - 5 \cdot a2 + 3}{2} \right]$$

Again a bulky expression #8!

```
#9:  coefs(0.5, 0.3)
```

$$\#10: \left[\frac{2 \cdot x1 + 5 \cdot (x2 + 2 \cdot x3)}{17}, -\frac{5 \cdot (11 \cdot x1 + 19 \cdot x2 - 30 \cdot x3)}{68} - \frac{5 \cdot \sqrt{55} \cdot i \cdot (13 \cdot x1 - 27 \cdot x2 + 14 \cdot x3)}{748}, -\frac{5 \cdot (11 \cdot x1 + 19 \cdot x2 - 30 \cdot x3)}{68} + \frac{5 \cdot \sqrt{55} \cdot i \cdot (13 \cdot x1 - 27 \cdot x2 + 14 \cdot x3)}{748} \right]$$

$$\begin{aligned} \#11: \quad ff(n, a1, a2, x1, x2, x3) := & \frac{2 \cdot x1 + 5 \cdot (x2 + 2 \cdot x3)}{17} \cdot 1^n + \left(- \frac{5 \cdot (11 \cdot x1 + 19 \cdot x2 - 30 \cdot x3)}{68} - \right. \\ & \left. \frac{5 \cdot \sqrt{55} \cdot i \cdot (13 \cdot x1 - 27 \cdot x2 + 14 \cdot x3)}{748} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) + a1 - 1}}{2} \right)^n + \left(- \frac{5 \cdot (11 \cdot x1 + 19 \cdot x2 - 30 \cdot x3)}{68} + \right. \\ & \left. \frac{5 \cdot \sqrt{55} \cdot i \cdot (13 \cdot x1 - 27 \cdot x2 + 14 \cdot x3)}{748} \right) \cdot \left(- \frac{\sqrt{(a1^2 + 2 \cdot a1 + 4 \cdot a2 - 3) - a1 + 1}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$\#12: \quad ff(1, 0.5, 0.3, 1, 5, -2) = 1$$

$$\#14: \quad \left(\text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, 0.5, 0.3, 10 \right) \right)_{i=1} = \left[1, 5, -2, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{37}{200}, \frac{183}{400}, \frac{1737}{4000}, \frac{3131}{8000}, \frac{33397}{80000} \right]$$

$$\begin{aligned} \#15: \quad ff(n, 0.5, 0.3, x1, x2, x3) = & -5^{-n/2} \cdot \left(\left(\frac{55 \cdot x1}{34} + \frac{95 \cdot x2}{34} - \frac{75 \cdot x3}{17} \right) \cdot \cos \left(n \cdot \text{ACOS} \left(- \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \right) + \left(\frac{5 \cdot \sqrt{55} \cdot (27 \cdot x2 - 14 \cdot x3)}{374} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{65 \cdot \sqrt{55} \cdot x1}{374} \right) \cdot \sin \left(n \cdot \text{ACOS} \left(- \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \right) \right) + \frac{2 \cdot x1}{17} + \frac{5 \cdot x2}{17} + \frac{10 \cdot x3}{17} \end{aligned}$$

$$\#17: \quad \text{TABLE}(ff(x, 0.5, 0.3, 1, 5, -2), x, 10, 100, 10)$$

$$\begin{aligned} \#18: \quad & \begin{bmatrix} 10 & 0.41746 \\ 20 & 0.41176 + 2.4676 \cdot 10^{-38} \cdot i \\ 30 & 0.41176 + 4.882 \cdot 10^{-42} \cdot i \\ 40 & 0.41176 \\ 50 & 0.41176 - 5.4948 \cdot 10^{-49} \cdot i \\ 60 & 0.41176 - 4.936 \cdot 10^{-52} \cdot i \\ 70 & 0.41176 - 5.438 \cdot 10^{-55} \cdot i \\ 80 & 0.41176 - 7.1662 \cdot 10^{-59} \cdot i \\ 90 & 0.41176 + 6.8356 \cdot 10^{-62} \cdot i \\ 100 & 0.41176 + 3.4224 \cdot 10^{-66} \cdot i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\#19: \quad \frac{2 \cdot x1 + 5 \cdot (x2 + 2 \cdot x3)}{17}$$

$$\#20: \quad \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot (5 + 2 \cdot (-2))}{17}$$

$$\#21: \quad \frac{7}{17}$$

$$\#22: \quad 0.41176$$

The limit according to your rule is:

$$\#23: \quad \frac{2}{17} \cdot x1 + \frac{5}{17} \cdot x2 + \frac{10}{17} \cdot x3$$

$$\#24: \quad \frac{2}{17} \cdot 1 + \frac{5}{17} \cdot 5 + \frac{10}{17} \cdot (-2)$$

$$\#25: \quad \frac{7}{17}$$

Rule from page 17

p 20	David Sjöstrand (and JB): The Proof	D-N-L#82
------	-------------------------------------	----------

Von: Yvonne Fogelander-Sjöstrand [yvonne@ydsa.se]
Gesendet: Mittwoch, 2. März 2011 21:46

Dear Josef,

thank you very much. I will look at your files with great interest.

You are right. It should be $n \geq 0$.

Best regards,
David

Von: David Sjöstrand [mailto:david@ydsa.se]
Gesendet: Mittwoch, 9. März 2011 21:49

Dear Josef,

now I have been investigating Davids Sequence_3.dfw and I think I understand what is happening.
In Davids Sequence_4.dfw I have investigated some more expressions.

#30 is a little bit more symbolic and its simplification confirms my rule a little bit more.

The function $\text{ptsn}(\text{ini}, a1, a2, n, \text{pt})$ is very nice it makes it easy to investigate sequences of order 3. Would it be possible to make it more general so that you can use it to investigate sequences of arbitrary order?

I will soon spend some time with Davids Sequence_2.dfw

Best regards,

David

$$\#30: \left(\text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}, 0.5, 0.3, 50 \right) \right)_{[48, 49, 50]} = \begin{bmatrix} 0.11764 \cdot x1 + 0.29410 \cdot x2 + 0.58821 \cdot x3 \\ 0.11763 \cdot x1 + 0.29409 \cdot x2 + 0.58818 \cdot x3 \\ 0.11763 \cdot x1 + 0.29409 \cdot x2 + 0.58818 \cdot x3 \end{bmatrix}$$

$$\#31: \frac{2}{17} \cdot x1 + \frac{5}{17} \cdot x2 + \frac{10}{17} \cdot x3$$

$$\#32: 0.11764 \cdot x1 + 0.29411 \cdot x2 + 0.58823 \cdot x3$$

Von: Josef Böhm [nojo.boehm@pgv.at]
Gesendet: Donnerstag, 17. März 2011 20:58

Dear David,

Many thanks for your new dfw-file.

I will try to "compose" a nice article on this topic for the next DNL.

Best regards
Josef

I leave the challenge to prove – or just double check - David's conjecture from page 17 for you! (Or you go to page ...)

École de technologie supérieure

Mat 145-03-05-07 : Calcul différentiel et intégral
Michel Beaudin

Session A-2010

Devoir #2

Corrigé sur 300 points, pondération : 15 %

Donné (pour les 3 groupes) le lundi 8 novembre 2010.

À remettre au SEG (B-2500) avant 17h, le vendredi 3 décembre 2010.

À faire en équipe de 2 à 4 étudiants.

Note 1 : des solutions de plusieurs exercices de ce devoir seront données en T.P. les jeudi 9 (AM, gr. 03; PM, gr. 07) et vendredi 10 décembre (AM, gr. 05). Les devoirs corrigés seront également remis aux étudiants pendant ces T.P. Notez, de plus, que la matière vue au dernier cours (semaine du 6 décembre) N'EST PAS évaluée dans ce devoir mais fait partie de l'examen final.

Note 2 : vous n'avez pas à calculer à la main les intégrales des problèmes suivants : #3, #4, #12, #13 et #14. Dans ce devoir, utilisez «Display Digits: Float 6» et «Complex Format: Rectangular». Une (autre) table d'intégrales est annexée à la fin de ce document : avec plus de symétrie entre les différentes formules, qui contient des primitives pour les racines carrées d'expressions quadratiques au numérateur et qui est en conséquence directe avec le problème 3B) du devoir 1. Je vous l'offre comme cadeau de Noël (merci à mon ami Albert Rich et à RUBI).

Problème 1 [15 points] Somme de gauche, somme de droite Considérons l'intégrale

définie suivante: $I = \int_1^8 \sqrt{1+x^3} dx$.

- Donnez une raison pour laquelle l'expression à intégrer est croissante sur l'intervalle [1, 8].
- Quelle valeur, pour I , est retournée par votre calculatrice?
- Remplissez le tableau suivant (utilisez vos fonctions « gauche », « droite » ou encore l'application Flash *Calculus Tools*) pour les calculs. Notez que vous avez bien les inégalités $Gauche(n) < I < Droite(n)$, pour chacune des valeurs de n dans le tableau.

n	Gauche(n)	Droite(n)
5		
20		
35		

Problème 2 [20 points] Construction de primitive (suite du problème 1). En mode exact, votre calculatrice ne peut trouver la valeur de I (certains logiciels le font mais la réponse est fort compliquée et incompréhensible pour un étudiant du premier cycle). Posons

$$\text{toto}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Définissez cette fonction sur votre TI. Vous allez trouver la valeur de I en termes de « toto ».

- En répondant en fonction de « toto », quelle est la valeur de $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$?

Problème 6 [25 points] Calcul d'intégrales du type $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$. Soient A , B et C trois nombres réels avec A non nul. Pour calculer $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$, on complète le carré et utilise un changement de variable. Cela nous amène à l'un des 3 cas connus suivants :

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} ; \quad \int \frac{dy}{a^2+y^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right) \quad (a > 0) ; \quad \int \frac{dy}{a^2-y^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{y}{a}\right) \quad (a > 0).$$

Appliquez cela pour calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{dx}{x^2+20x+109} & \text{b) } \int \frac{dx}{x^2+10x+21} & \text{c) } \int \frac{dx}{x^2+10x+25} \\ \text{d) } \int \frac{dx}{-x^2+6x-5} & \text{e) } \int \frac{dx}{2x^2-x+6} & \end{array}$$

Problème 7 [35 points] Calcul d'intégrales du type $\int \frac{ax+b}{Ax^2+Bx+C} dx$. Dans le cas d'intégrales du type $\int \frac{ax+b}{Ax^2+Bx+C} dx$, notre premier réflexe devrait être de vérifier si la dérivée du dénominateur n'est pas, à facteur près, au numérateur, ce qui donnera, comme réponse, un seul logarithme. Si tel n'est pas le cas, on regarde les racines du dénominateur. On fera des fractions partielles si les racines sont réelles (« expand » peut être utilisé mais ici c'est très rapide à la main) et on complètera le carré si elles sont complexes. Appliquez ces principes pour le calcul des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{(x+10)dx}{x^2+20x+109} & \text{b) } \int \frac{x dx}{x^2+10x+21} & \text{c) } \int \frac{(3-2x) dx}{x^2+10x+25} \\ \text{d) } \int \frac{5x dx}{-x^2+6x-5} & \text{e) } \int \frac{(7x-1) dx}{2x^2-x+6} & \end{array}$$

Problème 8 [50 points] Intégration par changement de variable. Chacune des intégrales suivantes peut se faire par un changement de variables. Calculez-les en utilisant votre table d'intégrales (ou celle à la dernière page de ce document).

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx & \text{b) } \int_0^{1/2} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx & \text{c) } \int_0^{\pi/6} \sin^8(3x) \cos(3x) dx & \text{d) } \int x^2 (4-5x^3)^{16} dx \\ \text{e) } \int \frac{(3+5\sqrt{x})^{20}}{\sqrt{x}} dx & \text{f) } \int_1^2 \frac{x dx}{(1+x^2)^4} & \text{g) } \int (10x^2+3x^{27})^{12} dx & \end{array}$$

Problème 9 [15 points] Intégration par parties. Calculez les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 x \ln(x+3) dx & \text{b) } \int (10x^2+1) \cos(2x) dx & \text{c) } \int (x+5) e^{2x} dx \end{array}$$

Problème 10 [10 points] Intégration par fractions partielles Calculez les intégrales suivantes, après avoir utilisé la commande « expand » de votre calculatrice :

a) $\int \frac{x \, dx}{(x-5)(2x+9)(x^2-16)}$ b) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+9)}$

Problème 11 [15 points] Intégration d'expressions quadratiques sous un radical Calculez, après avoir complété le carré, les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ b) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{16-6x+x^2}}$ c) $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2+4x+7} \, dx.$

Problème 12 [15 points] Intégrales impropres Indiquez pourquoi les intégrales suivantes sont impropres, dites si elles convergent et si oui, trouvez leur valeur.

a) $\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}} \, dy$ b) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(\cos x)^{4/3}} \, dx$

Problème 13 [15 points] Applications géométriques de l'intégrale définie Dessinez la région délimitée par les courbes $y = (x-1)^2$ et $y = 5 \ln(x+1)$ (vous pouvez reproduire le graphique).

- Trouvez l'aire de cette région.
- Trouvez la longueur de la frontière de cette région.
- Trouvez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région autour de l'axe des x .

Problème 14 [15 points] Applications géométriques de l'intégrale définie Dessinez la région délimitée par les courbes $y = 5 \sin \sqrt{x}$ et $y = e^{x/2} + e^{-2x}$.

- Trouvez l'aire de cette région.
- Trouvez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région autour de l'axe des x .
- Trouvez le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région autour de la droite horizontale $y = 1$.

Problème 15 [25 points] Séries de puissances, séries de Taylor

A) Trouvez l'intervalle de convergence de chacune des séries de puissances suivantes :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^3};$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-10)^n}{2^n};$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^n}{n \cdot 10^n}.$

B) Trouvez les développements de MacLaurin des fonctions suivantes jusqu'à l'ordre 4 et indiquez aussi l'intervalle de convergence. Allez-y de 2 façons différentes : en utilisant la

définition de série de MacLaurin $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$ et en utilisant les séries de base de la table.

i) $\frac{1}{10+x};$ ii) $\frac{x}{9-x^2};$ iii) $\cos(x^2).$

Une (autre) table d'intégrales

Note : la constante d'intégration a été omise et a désigne un nombre réel positif ($a > 0$).

« Les formules de base »

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n+1 \neq 0)$	2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$
3. $\int e^x dx = e^x$	
4. $\int \sin x dx = -\cos x$	5. $\int \cos x dx = \sin x$
6. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	7. $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right)$

« Le reste des fonctions trigonométriques de base »

8. $\int \tan x dx = -\ln(\cos x)$	9. $\int \cot x dx = \ln(\sin x)$
10. $\int \sec x dx = \operatorname{arctanh}(\sin x)$	11. $\int \csc x dx = -\operatorname{arctanh}(\cos x)$
12. $\int \sec^2 x dx = \tan x$	13. $\int \csc^2 x dx = -\cot x$
14. $\int \sec x \tan x dx = \sec x$	15. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$

« Les sommes et différences de carrés sous un radical »

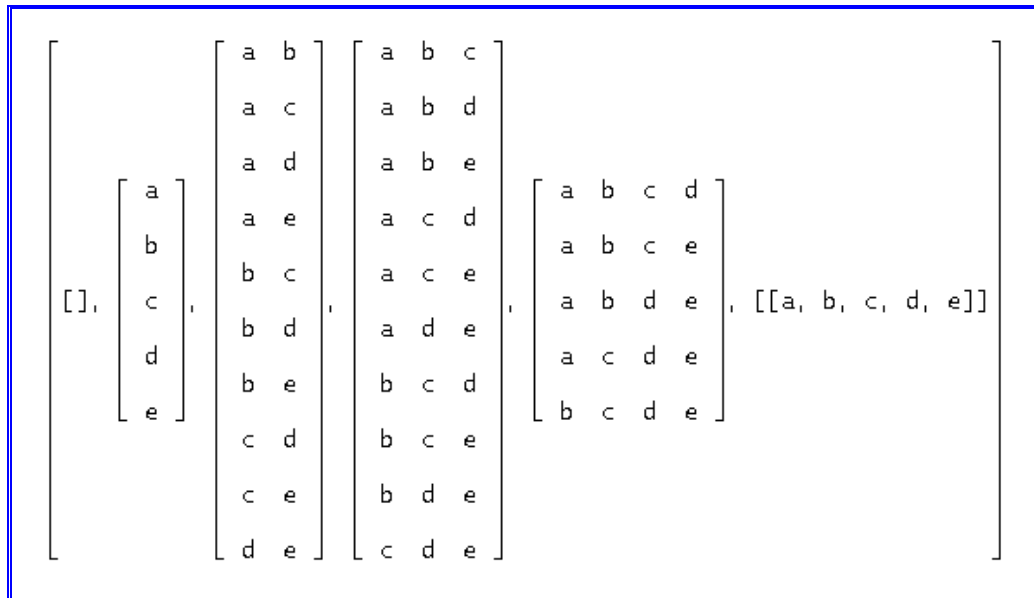
16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{-a^2+x^2}} dx = \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{-a^2+x^2}}{x}\right)$
19. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
20. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$
21. $\int \sqrt{-a^2+x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{-a^2+x^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-a^2+x^2}} dx$

Strukturierte Kombinatorik – Structured Combinatorics

Laws and Structures in Combinatorics
and

“Secrets of the Prime numbers”

Dietmar Oertel, München, Germany

**Abstract**

The following paper deals with laws, structures and patterns in combinatorics in connection with the *Triangle of Pascal*. In order to work meaningful with combinations of elements they must be given a structure. Having introduced a structure, special combinations can be addressed and if necessary supplied with attributes and then worked up under particular points of view.

Important advantages of a structure are:

- a clear order of an arbitrary assembled group of elements,
- a unique address of combinations,
- the order of structured combinatorics gives an answer to the old question of a pattern of the prime numbers.

The paper consists of two parts.

The first part, *Structured Combinatorics*, demonstrates the patterns appearing in the *Triangle of Pascal*.

The second part, *Structured Prime Numbers*, deals with the ‘phenomenon’ of the prime numbers, which can be described based on the *Structured Combinatorics*.

1 Structured Combinatorics

Unsorted and unstructured elements of a set cannot be used for follow-up calculations, observations, investigations, and simulations in most cases. This makes necessary to find a common structure for all possible combinations of elements.

The number of all possible combinations is given by

$$\text{Kmb}(n, k) := \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

which is in DERIVE available as `COMB(n, k)`.

The *Triangle of Pascal* is easily generated with

`PascalTriangle(n_from, n_to) := VECTOR([VECTOR(Kmb(j, k), k, 0, j)], j, n_from, n_to)`

For example:

$$\text{PascalTriangle}(0, 7) = \begin{bmatrix} 0 & [1] \\ 1 & [1, 1] \\ 2 & [1, 2, 1] \\ 3 & [1, 3, 3, 1] \\ 4 & [1, 4, 6, 4, 1] \\ 5 & [1, 5, 10, 10, 5, 1] \\ 6 & [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1] \\ 7 & [1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1] \end{bmatrix}$$

Row 5 gives the number of groups of selections of a given set of 4 distinct elements (without consideration of the order): There is one selection with no elements, there are 4 ways to select one element, 6 ways to select 2 elements, again 4 ways to select 3 elements and only one way to select all four elements.

We can see the groups of all different numbers of elements using the next function (base set of 5 elements):

`KmbObjAllNor([a, x, 5, 10, b])`

$$\left[[], \begin{bmatrix} a \\ x \\ 5 \\ 10 \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & x \\ a & 5 \\ a & 10 \\ a & b \\ x & 5 \\ x & 10 \\ x & b \\ 5 & 10 \\ 5 & b \\ 10 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & x & 5 \\ a & x & 10 \\ a & x & b \\ a & 5 & 10 \\ a & 5 & b \\ a & 10 & b \\ x & 5 & 10 \\ x & 5 & b \\ x & 10 & b \\ 5 & 10 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & x & 5 & 10 \\ a & x & 5 & b \\ a & x & 10 & b \\ a & 5 & 10 & b \\ x & 5 & 10 & b \end{bmatrix}, [[a, x, 5, 10, b]] \right]$$

We can also find all selections with a given number of elements (e.g. for 4 elements):

$$\text{KmbObjGrp}([a, x, 5, 10, b], 4) = \begin{bmatrix} a & x & 5 & 10 \\ a & x & 5 & b \\ a & x & 10 & b \\ a & 5 & 10 & b \\ x & 5 & 10 & b \end{bmatrix}$$

Earlier we spoke about finding a unique address for each single combination.

Function `KmbPosOf([Combination],[base set])` returns the “address” of the combination – which is the position in the *Triangle of Pascal*.

Function `KmbNteObjIn(pos,grp,[base set])` finds the combination at the given position.

Let’s give two examples (applying DERIVE’s DISPLAY-command):

What is the position of [10,b,a] in all combinations of [a,x,5,10,b]?

```
#18: KmbPosOfKmb([10, b, a], [a, x, 5, 10, b])
requested (sorted):
[10, a, b]
in base set (sorted):
[5, 10, a, b, x]
Group: 3
Group size: 10
Position:
#19: 7
```

The function gives an answer: It is in the 7th row of the column of three elements’ combinations. Is this true?

We double check by generating all groups of possible combinations of the given 5-element set:

```
#20: KmbObjAllNor([5, 10, a, b, x])
```

$$\#21: \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 5 \\ 10 \\ a \\ b \\ x \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 5 \ 10 \\ 5 \ a \\ 5 \ b \\ 5 \ x \\ 10 \ a \\ 10 \ b \\ 10 \ x \\ a \ b \\ a \ x \\ b \ x \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 5 \ 10 \ a \\ 5 \ 10 \ b \\ 5 \ 10 \ x \\ 5 \ a \ b \\ 5 \ a \ x \\ 5 \ b \ x \\ 10 \ a \ b \\ 10 \ a \ x \\ 10 \ b \ x \\ a \ b \ x \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 5 \ 10 \ a \ b \\ 5 \ 10 \ a \ x \\ 5 \ 10 \ b \ x \\ 5 \ a \ b \ x \\ 10 \ a \ b \ x \end{array} \right], [[5, 10, a, b, x]] \end{array} \right]$$

Yes, indeed. The combination of 10, a, and b is placed in the seventh row of the group built by the 3-element combination. But we could also use the inverse function (without regarding the order of the elements!)

```
#22: KmbNteKmbIn(7, 3, [5, x, a, b, 10])
```

```
Nth Element :
```

```
7
```

```
in Group: 3
```

```
in base set (sorted):
```

```
[5, 10, a, b, x]
```

```
Group Size: 10
```

```
Combination:
```

```
#23: [10, a, b]
```

Another example with more elements:

```
#24: KmbPosOfKmb([15, 11, 1, 2], [1, ..., 20])
```

```
requested (sorted):
```

```
[1, 2, 11, 15]
```

```
in base set (sorted):
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

```
Group: 4
```

```
Group size: 4845
```

```
Position:
```

```
#25: 112
```

Would you like to check this manually? I prefer asking DERIVE doing the job:

```
#26: KmbNteKmbIn(112, 4, [1, ..., 20])
```

```
Nth Element :
```

```
112
```

```
in Group: 4
```

```
in base set (sorted):
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

```
Group Size: 4845
```

```
Combination:
```

```
#27: [1, 2, 11, 15]
```

p 30	Dietmar Oertel: Structured Combinatorics	D-N-L#82
------	--	----------

$\text{KmbPosOfKmb}([2,3,4],[1,\dots,10]) = 37$

$\text{KmbNteKmbIn}(37,3,[1,\dots,10]) = [2,3,4]$

$\text{KmbPosOfKmb}([11,15,12,17],[1,\dots,40]) = 64040 \quad (11 \text{ sec})$

$\text{KmbNteKmbIn}(64040,4,[1,\dots,40]) = [11,12,15,17]$

$\text{KmbPosOfKmb}([1,2,7,16,20,33],[1,\dots,33]) = 15757 \quad (154 \text{ sec})$

$\text{KmbNteKmbIn}(15757,6,[1,\dots,33]) = [1,2,7,16,20,33]$

I am no mathematician. I did not come across a way to describe this structure in a short way until now. So I am using for my own the following notation:

$$\text{Pos}_x = \underset{\text{Main}=33}{\overset{\text{Sub}=4}{P}}_{[1,\dots,33]}([11,12,15,27]) = 32116$$

$$\text{Kmb}_x = \underset{\text{Main}=33}{\overset{\text{Sub}=4}{K}}_{[1,\dots,33]}(32116) = [11,12,15,27]$$

Remark: If there is any official notation then please let me know. I would be very grateful when a professional mathematician would indicate a more appropriate notation, which could be applied for mathematical problems.

TIME 2010 – The Proceedings

Dear colleagues,

Now you can download the CD version of Proceedings of TIME 2010 and the covers for the CD box. In order to do it, go to TIME 2010 website (<http://www.time2010.uma.es/>), select the Proceedings section and then visit the section CD version of Proceedings.

You will find two different options to download:

- PROCTIME2010.iso: This is an .iso-version which can be burnt with any software which supports iso files.
- PROCTIME2010.zip: A zip file with the contents of the Proceedings.

If the CD does not auto-run, open the file index.html to see the contents of proceedings.

Best regards and we hope to meet you once again in Estonia for TIME 2012.

José Luis, Gabriel and Pedro

Editors of TIME 2010 Proceedings


```

    ptsn(ini, coeffs, n, pt, pt_, d, k, k_) :=
    Prog
      pt := ini
      d := DIM(ini)
      k := d + 1
      coeffs := APPEND(coeffs, [1 - Σ(coeffs)])
#1:    Loop
      If k > n
        RETURN pt
      k_ := DIM(pt)
      pt_ := Σ(coeffs↓i·pt↓(k_ - d + i), i, 1, d)
      pt := APPEND(pt, [pt_])
      k := k + 1

```

$$\#2: \left(\text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} 34 & 73 \\ 5 & 3 \\ 100 & -36 \end{bmatrix}, [0.2, 0.8], 100 \right) \right)_{[98, 99, 100]} = \begin{bmatrix} 50.81818181 & -8.363636363 \\ 50.81818181 & -8.363636363 \\ 50.81818181 & -8.363636363 \end{bmatrix}$$

$$\#3: \text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, [0.14, 0.12, -0.23, 0.16], 7 \right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \\ 6.12 \\ 5.4472 \end{bmatrix}$$

$$\#4: \left(\text{ptsn} \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, [0.14, 0.12, -0.23, 0.16], 100 \right) \right)_{100} = [4.074074074]$$

David's formula for the limit

```

    seqlim(ini, coeffs, d, den) :=
    Prog
      d := DIM(ini)
#5:    coeffs := APPEND(coeffs, [1 - Σ(coeffs)])
      den := Σ(Σ(coeffs↓k, k, 1, 1), 1, 1, d)
      Σ(ini↓i·Σ(coeffs↓1, 1, 1, i)/den, i, 1, d)

```

$$\#6: \text{seqlim} \left(\begin{bmatrix} 34 & 73 \\ 5 & 3 \\ 100 & -36 \end{bmatrix}, [0.2, 0.8] \right) = \left[\frac{559}{11}, -\frac{92}{11} \right]$$

$$\#7: \text{seqlim} \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, [0.14, 0.12, -0.23, 0.16] \right) = [4.074074074]$$

A Mathematical Model for Snail Shells (2)

Piotr Trebisz, Germany



Im 1. Teil meiner Artikelreihe habe ich eine Methode vorgestellt wie man Schneckenhäuser als parametrisierbare Oberfläche eines Torus modellieren kann, der auf einer planaren logarithmischen Spiral-Kurve basiert.

Diese sind aber nur ein Spezialfall. Deshalb werde ich im 2. Teil meiner Artikelreihe zeigen wie man den interessanteren, aber auch komplexeren, Typ modellieren kann, der auf konischen logarithmischen Spiral-Raumkurven basiert.

Ich nenne dieses konische Schneckenhaus "Trebisz-Spirale - Typ 2". Da die Konstruktion von Typ 2 analog ist zur Konstruktion von Typ 1, werden wir einige der Dinge, die wir im 1. Teil gelernt haben, auch hier anwenden können.

In the first part of my series I presented a method how to model snail shells as parameterized surface of a torus based on a logarithmic spiral.

As these surfaces are a special case I'd like to demonstrate how to model a more interesting but more complex type which is based on conical logarithmic spirals in space.

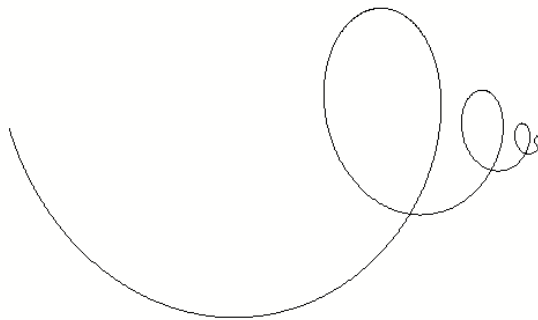
I will call this conical snail shell "Trebisz Spiral Type 2". Construction of type 2 surfaces is analogous to construction of type 1 bodies, so we can apply some facts which we have learnt in part 1.

Als Gerüst für dieses Schneckenhaus dient eine konische logarithmische Spiral-Raumkurve die nach ihrer Länge parametrisiert ist und die sich um die X-Achse windet. Der Parameter t steht hierbei für die Länge der Spirale entlang der X-Achse, b ist die Basis der Logarithmus und m ist das Verhältnis zwischen der Länge des Konus und seinem Radius.

As base for this type of snail shells serves a conical logarithmic 3D-spiral which is parameterized by its length winding around the x-axis. Parameter t describes the length of the spiral along the x-axis. b is the base of the logarithm and m is the ratio between the length of the cone and its radius.

#9: $\text{SNAIL}(b, m, t) := [t, m \cdot t \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \log(t, b)), m \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \log(t, b))]$

Example: $\text{SNAIL}(e, 1/2, t)$ with $0 \leq t \leq 1$



Dass diese Spirale parametrisiert ist nach der Länge entlang der X-Achse ist offensichtlich. Dass die Spirale auch nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist, lässt sich dadurch zeigen, dass die Tangente an jedem Punkt der Spiral-Raumkurve eine konstante Länge hat.

It is obvious that this spiral is parameterized by its length along the x-axis. We can show that it is also parameterized by its arc length: the tangent in every point of the spiral has constant length.

$$\#10: \left| \frac{d}{dt} \text{SNAIL}(b, m, t) \right| = \frac{\sqrt{(m^2 + 1) \cdot \ln(b)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2}}{\ln(b)}$$

Wie man sieht ist die Spirale auch nach ihrer Bogenlänge parametrisiert, aber skaliert um einen konstanten Maßstabs-Faktor.

Um den Mantel des Schneckenhauses zu konstruieren benötigen wir das begleitende Dreibein, welches wir mittels der Frenetschen Formeln ermitteln können.

As you can see the spiral is parameterized by its arc length but scaled by a constant measurement factor. For constructing the surface of the snail shell we are needing the accompanying three pod which can be obtained by Frenet's formulae.

$$\#11: X_Achse(b, m, t) := \text{SIGN} \left(\left(\frac{d}{dt} \text{SNAIL}(b, m, t) \right) \times \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \text{SNAIL}(b, m, t) \right)$$

$$\#12: Y_Achse(b, m, t) := - \text{SIGN} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \text{SNAIL}(b, m, t) \right)$$

$$\#13: Z_Achse(b, m, t) := \text{SIGN} \left(\frac{d}{dt} \text{SNAIL}(b, m, t) \right)$$

Dieses lokale mitdrehende Koordinatensystem hat dieselbe Händigkeit wie das globale Koordinatensystem, in dem die Spirale definiert ist.

This local co-rotating system of coordinates has the same direction as the global system where the spiral is defined.

$$\#14: X_Achse(b, m, t) \times Y_Achse(b, m, t) = Z_Achse(b, m, t)$$

Analog zum Typ 1 soll die Mantelfläche einen kreisförmigen Querschnitt haben. Zusätzlich soll dieser Kreis an jedem Punkt der Spirale die X-Achse berühren damit um die X-Achse herum keine Lücke entsteht. Es stellt sich also die Frage wie der Radius des Kreises von t abhängen soll, damit diese Bedingung erfüllt ist.

Der Ansatz ist der, dass wir uns zu jedem Punkt auf der Spirale einen korrespondierenden Punkt auf der X-Achse suchen, so dass die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten senkrecht zur Tangente steht.

In analogy to type 1 the surface shall have a circle as cross section. Additionally this circle shall touch the x-axis in each point of the spiral such that there will be no gap around the x-axis. How shall the radius of the circle depend on t to fulfill this condition?

We try to find for every spiral point a corresponding point on the x-axis such that the connecting line between these points is perpendicular to the tangent.

$$\#15: LINIE(b, m, t, a) := [a, 0, 0] - SNAIL(b, m, t)$$

Gesucht ist ein a für das gilt: We are searching for an a with:

$$\#16: LINIE(b, m, t, a) \cdot \frac{d}{dt} SNAIL(b, m, t) = 0$$

Wir lösen die Gleichung nach a / We solve for a

$$\#17: a = m \cdot t + t^2$$

Wir setzen a in $LINIE(b, m, t, a)$ ein und bestimmen die Länge der Verbindungslinie. Damit erhalten wir den passenden Radius für den Mantelkreis.

We substitute for a in $LINIE(b, m, t, a)$ and calculate the length of the connecting line segment. This gives the appropriate radius for the circle of the surface.

$$\#18: \left| LINIE(b, m, t, m \cdot t + t^2) \right| = m \cdot t \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

Wie man sieht wächst der Radius des Mantels, analog zum Typ 1, linear mit der Länge der Spirale.

We see that the radius of the surface – like type 1 – is increasing linearly with the length of the spiral.

$$\#19: MANTEL(b, m, t, \phi) := m \cdot \sqrt{m^2 + 1} \cdot t \cdot (\cos(\phi) \cdot X_Achse(b, m, t) + \sin(\phi) \cdot Y_Achse(b, m, t))$$

Damit haben wir alle Zutaten für unser Schneckenhaus. Es ist die Summe aus Mantel und Spirale.

So we have now all ingredients for our snail shell. It is the sum of surface and spiral.

$$\#20: SpiralTorusX_L(b, m, t, \phi) := SNAIL(b, m, t) + MANTEL(b, m, t, \phi)$$

Wenn wir das Schneckenhaus stattdessen nach der Anzahl der Umdrehungen parametrisieren wollen, müssen wir t durch b^t ersetzen.

If we want to parameterize by the number of rotations we have to replace t by b^t .

#22: $\text{SpiralTorusX_U}(b, m, t, \phi) := \text{SpiralTorusX_L}(b, m, b^t, \phi)$

Wie zu erwarten war gibt es auch beim konischen Schneckenhaus das selbe Problem mit dem Parameter m . Ist m zu groß, dann durchdringt sich die Mantelfläche bei jeder Umdrehung selbst.

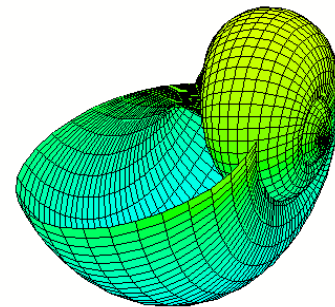
How expected we are facing now again the problem with the parameter m . If m is too big then the surface will interpenetrate.

Example:

$\text{SpiralTorusX_L}(e, 2/3, t, \phi)$

with

$$0 \leq t \leq 1 \wedge -\pi \leq \phi \leq \pi$$



Ist m hingegen zu klein, dann klappt eine hässliche Lücke zwischen den Windungen des Spiraltorus.

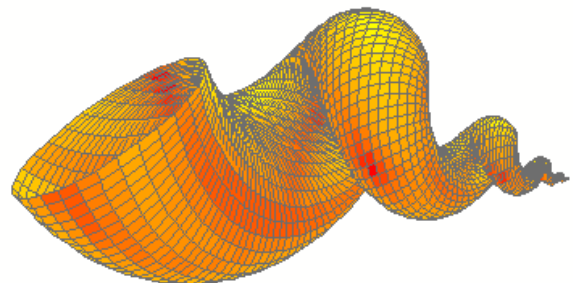
If m is too small, then we have an ugly gap between the windings of the surface.

Example:

$\text{SpiralTorusX_L}(e, 1/4, t, \phi)$

with

$$0 \leq t \leq 1 \wedge -\pi \leq \phi \leq \pi$$



Wir würden gerne m so bestimmen, dass die Mantelfläche sich bei jeder Umdrehung selbst berührt aber ohne sich selbst zu durchdringen.

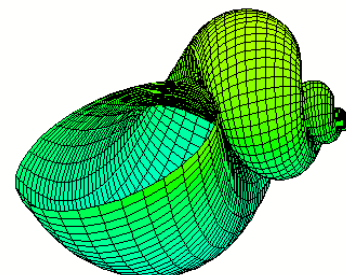
We would like to determine m such that the surface is osculating itself at every winding without interpenetrating itself.

Example:

$\text{SpiralTorusX_L}(e, 571877/1286241, t, \phi)$

with

$$0 \leq t \leq 1 \wedge -\pi \leq \phi \leq \pi$$



Es überrascht wohl kaum, dass der Ansatz zur Lösung dieses Problems analog zur Lösung des Selbstdurchdringungsproblems beim Schneckenhaus von Typ 1 ist: Wir bestimmen den Schnitt des Schneckenhauses mit der XY-Ebene. Die Z-Koordinate muss also 0 sein. Doch anders als bei Typ 1 schneidet Typ 2 die XY-Ebene immer und nicht nur bei jeder halben Umdrehung. Deshalb muss man die Z-Koordinate hier nicht nach t sondern nach φ auflösen.

Im Prinzip könnte man dabei genauso vorgehen wie beim Schneckenhaus vom Typ 1 und die Z-Koordinate nach φ auflösen, allerdings ist diese beim Typ 2 ein ziemlich komplizierter Term und die Lösung die wir dabei erhalten ist sehr unhandlich. Um uns die Arbeit zu erleichtern suchen wir uns stattdessen eine alternative, aber äquivalente, Parametrisierung für das Schneckenhaus, dessen Z-Koordinate sich einfacher nach φ auflösen lässt.

Wir haben ja vorhin die Länge der Verbindungslinie zwischen der Spirale und der X-Achse bestimmt um den Radius des Kreises zu berechnen. Genau diese Verbindungslinie können wir stattdessen als lokale mitdrehende X-Achse verwenden, denn sie hat ja bereits die passende Länge und steht senkrecht zur Tangente.

It is not surprising that the solution of this problem is very similar to the solution of the interpenetrating problem of the type 1 snail shells. We determine the intersection of the shell with the xy-plane – hence the z-coordinate must be 0. But in a different way from type 1 type 2 intersects the xy-plane always and not only at every half rotation. As consequence we have to solve the z-coordinate not for t but for φ .

Basically one could proceed like with type 1 shells and solve the z-coordinate for φ but this expression is here a pretty complex term and the solution a bulky expression. In order to make work easier we are looking for an alternative but equivalent parameterization which enables a more comfortable solution for φ .

We have calculated the length of the segment between the spiral and the x-axis in order to calculate the radius of the circle. This line can be used as local co-rotating x-axis because it has the appropriate length and is perpendicular to the tangent.

```
#24: X_Achse_Neu(b, m, t) := LINIE(b, m, t, m^2 * t + t)
#25: Y_Achse_Neu(b, m, t) := |LINIE(b, m, t, m^2 * t + t)| * SIGN((d/dt SNAIL(b, m, t)) * X_Achse_Neu(b, m, t))
#26: MANTEL_NEU(b, m, t, phi) := COS(phi) * X_Achse_Neu(b, m, t) + SIN(phi) * Y_Achse_Neu(b, m, t)
#27: Schnecke_L(b, m, t, phi) := SNAIL(b, m, t) + MANTEL_NEU(b, m, t, phi)
```

Um das Rechnen zu erleichtern, arbeiten wir lieber mit dem Schneckenhaus, das nach der Anzahl der Umdrehungen parameterisiert ist.

In order to make calculation easier we prefer working with the snail shell parameterized by the number of rotations.

```
#28: Schnecke_U(b, m, t, phi) := Schnecke_L(b, m, b^t, phi)
```

Diese Funktion beschreibt das selbe Schneckenhaus wie die ursprüngliche Funktion, die Terme sind aber einfacher und handlicher. Die beiden Funktionen unterscheiden sich nur in einer konstanten Differenz des Winkels φ .

Auch die Z-Koordinate lässt sich jetzt einfacher nach φ auflösen. Es empfiehlt sich aber dies per Hand durchzuführen, da die Ergebnisse, die DERIVE liefert, unnötig kompliziert sind (#31).

Both functions are describing the same surface. They only differ in a constant difference of the angle φ .

The z-coordinate can be solved easier for φ , too. I recommend performing this manually because the DERIVE results are unnecessarily complicated (#31).

$$\begin{aligned} \#30: \quad 0 &= m \cdot b^t \cdot \left(\left(1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{((m+1) \cdot \ln(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2}} - \cos(\varphi) \right) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \frac{(m+1) \cdot \ln(b) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t)}{\sqrt{((m+1) \cdot \ln(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2}} \right) \\ \#31: \quad \varphi &= 2 \cdot \text{ATAN} \left(\frac{(m+1) \cdot \ln(b) \cdot \cot(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot m^2}{\sqrt{((m+1) \cdot \ln(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2}} \right) \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt diese Lösung einsetzen verschwindet die Z-Koordinate und wir erhalten die Schnittkurve des Schneckenhauses mit der XY-Ebene.

Substituting this solution the z-coordinate disappears and we obtain the intersection curve of the snail shell with the xy-plane.

$$\begin{aligned} \#32: \quad \text{SCHNITT}(b, m, t) &:= \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot b^t \cdot \left(\frac{2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot \ln(b) \cdot (\ln(b) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \pi \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))}{(m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))^2 + 1 \cdot \ln(b)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot (\pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \ln(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))} + \frac{1}{m^2} - 1 \right)}{2 \cdot \ln(b) \cdot m \cdot b^t \cdot \frac{(m+1) \cdot \ln(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)}{(m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))^2 + 1 \cdot \ln(b)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot (\pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \ln(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))}} \right] \end{aligned}$$

Man erhält exakt die selbe Schnittkurve wenn man die Z-Koordinate der originalen Parametrisierung $\text{SpiralTorusX_U}(b, m, t, \varphi)$ nach φ auflöst und die Lösung dann für φ einsetzt. Ich werde das hier aber nicht extra beweisen, stattdessen ermutige ich die interessierten Leser sich selbst daran zu versuchen.

Die Wahl dieser alternativen Darstellung für das Schneckenhaus hat, neben einfacheren Termen, noch einen anderen großen Vorteil. Und zwar lassen sich damit geeignete Startwerte für das Newton-Verfahren bestimmen, auf das ich später noch im Verlauf meines Artikels näher eingehen werde.

Indem wir die komplizierten Terme mit den trigonometrischen Funktionen durch die Teilfunktionen f1, f2 und f3 ersetzen, können wir die Schnittkurve kompakter darstellen

One obtains exactly the same intersection curve when solving the z-coordinate of the original parameterization $\text{SpiralTorusX_U}(b, m, t, \varphi)$ for φ and then substitutes for φ . I don't want to prove this here but I ask the interested reader to try this proof.

The choice of this alternative representation has a second advantage: we can find appropriate initial values for the Newton method which will be used later in my paper.

Replacing the complicated expressions containing the trig functions by sub-functions f1, f2, and f3 it is possible to give the intersection curve a more compact form.

$$\#33: \quad f1(b, t) := 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot \ln(b) \cdot (\ln(b) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) + 2 \cdot \pi \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))$$

$$\#34: \quad f2(b, m, t) := (m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))^2 + 1 \cdot \ln(b)^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot (\pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \ln(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))$$

$$\#35: \quad f3(b, m, t) := (m+1) \cdot \ln(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

#36:
$$\text{SCHNITT}(b, m, t) = \left[\frac{2}{m} \cdot b \cdot \left(\frac{f1(b, t)}{f2(b, m, t)} + \frac{1}{2} - 1 \right), 2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{t}{f2(b, m, t)} \cdot \frac{f3(b, m, t)}{f2(b, m, t)} \right]$$

Schauen wir uns ein paar Schnittkurven für Schneckenhäuser an, die die von uns geforderte Bedingung erfüllen, nämlich dass sie sich bei jeder Umdrehung selbst berühren ohne sich dabei zu durchdringen. Die beiden Diagonalen stellen den Schnitt des Kegels dar, in dem sich die Gerüstspirale windet.

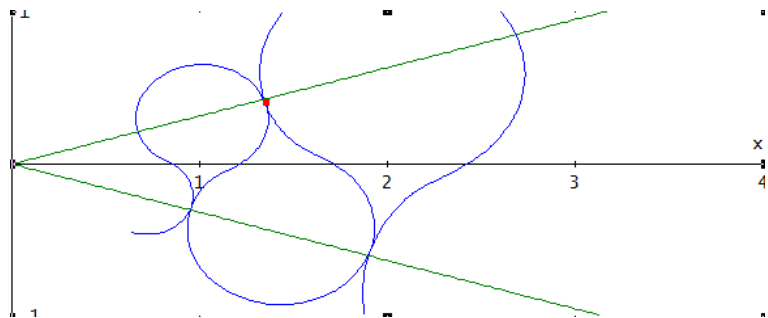
Let's inspect some intersection curves which are satisfying the required condition by touching themselves at each rotation without interpenetration. The two lines represent the intersection of the cone which contains the winding base spiral.

Example:

$\text{SCHNITT}(2, 343263/1083221, t)$

and

$$-1/2 \leq t \leq 3/2$$

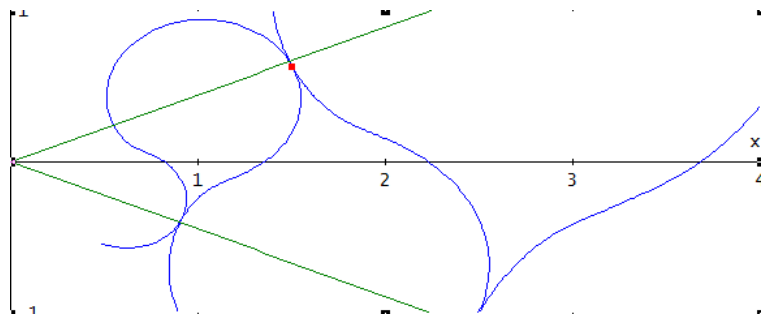


Example:

$\text{SCHNITT}(e, 571877/1286241, t)$

and

$$-1/2 \leq t \leq 3/2$$

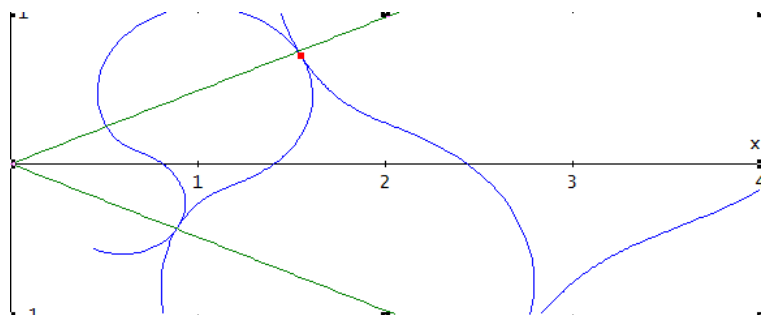


Example:

$\text{SCHNITT}(3, 7166353/14797132, t)$

and

$$-1/2 \leq t \leq 3/2$$



Anhand der Grafiken erkennt man, dass beim Schneckenhaus vom Typ 2 die Bestimmung des passenden m leider nicht so leicht ist wie beim Typ 1.

Beim Typ 1 liegen die Berührungspunkte zumindest auf der Y-Achse, so dass die Parameter φ der beiden Berührungspunkte analytisch ermittelt und in die Schnittkurven eingesetzt werden können. Dadurch reduziert sich dort das Problem auf eine einzige Gleichung.

Hier sehen wir aber, dass beim Typ 2 die beiden Berührungspunkte weder auf der Y- bzw. X-Achse, noch auf den Kegelerzeugenden liegen. Die beiden Parameterwerte t der Berührungspunkte lassen sich hier leider nicht analytisch ermitteln und in die Schnittkurve einsetzen. Anstelle dessen müssen wir beim Typ 2 sowohl m als auch die beiden Werte für t numerisch bestimmen.

Da nun die Werte von drei Variablen gesucht sind, müssen wir das Problem als ein System von drei Gleichungen formulieren deren Nullstellen wir bestimmen müssen.

Wie sehen diese Gleichungen aus? Zum einen müssen natürlich die beiden Berührungspunkte dieselben Koordinaten haben. Die Variablen r und s bezeichnen hier die beiden verschiedenen Parameter t der Berührungspunkte. Daraus ergeben sich die ersten beiden Gleichungen.

Für die X- und Y-Koordinate der Berührungspunkte erhalten wir - mit $r > s$:

Inspecting the graphs we can see that finding the appropriate m for type 2 shells is not as easy as it was for the type 1 shells.

The tangency points for type 1 are at least lying on the y-axis which enables finding the parameter φ of both points analytically and then substituting in the intersection curves. The problem is reduced to one single equation.

But here for type 2 both tangency points are neither lying on one of the two axes nor on the surface line of the cone. Both values for t of the tangency points cannot be determined analytically for substitution into the intersection curve. The values for m and for both t can only be found numerically.

As values for three variables are requested, the problem must be defined as a system of three equations in order to determine three zeros.

How do these equations look like? First of all both tangency points must have the same coordinates. Variables r and s indicate the two different parameters t . This leads to the first two equations.

For the x- and y-coordinate of the tangency points with $r > s$:

$$\#37: \quad 0 = \frac{(\text{SCHNITT}(b, m, r))}{2} - \frac{(\text{SCHNITT}(b, m, s))}{2}$$

$$\#38: \quad 0 = \frac{(\text{SCHNITT}(b, m, r))}{1} - \frac{(\text{SCHNITT}(b, m, s))}{1}$$

Gleichzeitig soll sich die Schnittkurve an den beiden Berührungspunkten nicht selbst schneiden. Als Konsequenz daraus stehen die Tangenten der Schnittkurve an den beiden Berührungspunkten parallel zu einander. Auch das lässt sich als eine Gleichung formulieren:

Simultaneously the intersection curve shall not intersect itself in both tangency points. We will denote this in an equation expressing that the tangents in these points must be parallel:

$$\#40: \quad 0 = \left(\frac{d}{dr} (\text{SCHNITT}(b, m, r)) \right)_1 \cdot \frac{d}{ds} (\text{SCHNITT}(b, m, s))_2 - \left(\frac{d}{dr} (\text{SCHNITT}(b, m, r)) \right)_2 \cdot \frac{d}{ds} (\text{SCHNITT}(b, m, s))_1$$

Damit haben wir ein Gleichungssystem formuliert. Gesucht ist ein Tripel m , r und s für das gilt:

So we have set up a system of equations for unknown m , r , and s as follows:

$$\#41: \quad 0 = \frac{2}{m} \cdot r \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) - \frac{2}{m} \cdot s \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

p 40	Piotr Trebisz: A Mathematical Model for Snail Shells	D-N-L#82
-------------	---	-----------------

$$\#42: 0 = 2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} - 2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)}$$

$$\#43: 0 = \left(\frac{d}{dr} \left(m \cdot b \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right) \right) \cdot \frac{d}{ds} \left(2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)} \right) - \left(\frac{d}{dr} \left(2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} \right) \right) \cdot \frac{d}{ds} \left(m \cdot b \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right)$$

Die drei Gleichungen können weiter vereinfacht werden zu:

These equations can be “simplified” further to:

$$\#47: 0 = b \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) - b \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$\#48: 0 = b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} - b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)}$$

$$\#49: 0 = \frac{\frac{d}{dr} \left(b \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right)}{\frac{r}{b}} \cdot \frac{\frac{d}{ds} \left(b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)} \right)}{\frac{s}{b}} - \frac{\frac{d}{dr} \left(b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} \right)}{\frac{r}{b}} \cdot \frac{\frac{d}{ds} \left(b \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right)}{\frac{s}{b}}$$

Dieses Gleichungssystem ist höchst nichtlinear. Deshalb müssen wir uns, genauso wie beim Schneckenhaus vom Typ 1, des Newton-Verfahrens bedienen, um dieses Gleichungssystem numerisch zu lösen. Gesucht sind die Nullstellen der folgenden Funktionen:

This system is not linear at all. So we have to apply – like we did for the type 1 shells – the Newton-Raphson method in order to obtain the zeros of the following functions numerically:

$$\#50: J1(b, m, r, s) := b \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) - b \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$\#51: J2(b, m, r, s) := b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} - b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)}$$

$$\#52: J3(b, m, r, s) := \frac{\frac{d}{dr} \left(b \cdot \left(\frac{f1(b, r)}{f2(b, m, r)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right)}{\frac{r}{b}} \cdot \frac{\frac{d}{ds} \left(b \cdot \frac{s \cdot f3(b, m, s)}{f2(b, m, s)} \right)}{\frac{s}{b}} - \frac{\frac{d}{dr} \left(b \cdot \frac{r \cdot f3(b, m, r)}{f2(b, m, r)} \right)}{\frac{r}{b}} \cdot \frac{\frac{d}{ds} \left(b \cdot \left(\frac{f1(b, s)}{f2(b, m, s)} + \frac{1}{2} - 1 \right) \right)}{\frac{s}{b}}$$

Dies ist eine Iteration des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens.

This is an iteration of the multi-dimensional Newton method.

$$\#53: \begin{bmatrix} m_2, r_2, s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1, r_1, s_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d}{dm} J1(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J1(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J1(b, m_1, r_1, s_1) \\ \frac{d}{dm} J2(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J2(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J2(b, m_1, r_1, s_1) \\ \frac{d}{dm} J3(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J3(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J3(b, m_1, r_1, s_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} J1(b, m_1, r_1, s_1) \\ J2(b, m_1, r_1, s_1) \\ J3(b, m_1, r_1, s_1) \end{bmatrix}$$

$$[J1(b, m_1, r_1, s_1), J2(b, m_1, r_1, s_1), J3(b, m_1, r_1, s_1)]$$

Eine äquivalente, aber effizientere und kompaktere Darstellung für die Iteration lässt sich mit einer Jacobi-Matrix erzielen.

An equivalent but more efficient and more compact form of this method can be achieved using a Jacobi matrix.

$$\#54: \text{JACOBI_MATRIX}(b, m_1, r_1, s_1) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dm} J1(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J1(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J1(b, m_1, r_1, s_1) \\ \frac{d}{dm} J2(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J2(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J2(b, m_1, r_1, s_1) \\ \frac{d}{dm} J3(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{dr} J3(b, m_1, r_1, s_1) & \frac{d}{ds} J3(b, m_1, r_1, s_1) \end{bmatrix}$$

$$\#55: \begin{bmatrix} m_2, r_2, s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1, r_1, s_1 \end{bmatrix} - \text{ROW_REDUCE}(\text{JACOBI_MATRIX}(b, m_1, r_1, s_1))$$

Die drei Funktionen J1, J2 und J3 sowie ihre Ableitungen nach m , r und s sind sehr komplex, deshalb müssen wir sie in handliche Teilfunktionen zerlegen um ihre Komplexität zu bändigen, ganz nach dem Prinzip "Teile und Herrsche".

The three functions J1, J2, and J3 and their derivatives wrt m , r , and s are very complex. Thus we have to decompose them into comfortable sub-functions following the principle "Divide et impera" = "Divide and Conquer".

$$\#56: [v1 \in \text{Vector}, v2 \in \text{Vector}, v3 \in \text{Vector}]$$

$$\#57: [Fr \in \text{Vector}, Fs \in \text{Vector}, Gr \in \text{Vector}, Gs \in \text{Vector}]$$

Als erstes definieren wir uns eine Funktion F, die aus den Teilfunktionen f1, f2 und f3 und ihren Ableitungen nach m und t besteht.

Firstly we define a function F consisting of the sub-functions f1, f2, and f3 and their derivatives wrt m and t .

$$\#58: F(b, m, t) := \begin{bmatrix} f1(b, t) & \frac{d}{dm} f1(b, t) & \frac{d}{dt} f1(b, t) & \frac{d}{dm} \frac{d}{dt} f1(b, t) & \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f1(b, t) \\ f2(b, m, t) & \frac{d}{dm} f2(b, m, t) & \frac{d}{dt} f2(b, m, t) & \frac{d}{dm} \frac{d}{dt} f2(b, m, t) & \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f2(b, m, t) \\ f3(b, m, t) & \frac{d}{dm} f3(b, m, t) & \frac{d}{dt} f3(b, m, t) & \frac{d}{dm} \frac{d}{dt} f3(b, m, t) & \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f3(b, m, t) \end{bmatrix}$$

Nach dem Baukastenprinzip können wir daraus die Teilkomponenten der Jacobi-Matrix zusammen setzen. Die Vektoren $v1$, $v2$ und $v3$ repräsentieren hier die Teilfunktionen $f1$, $f2$ und $f3$ und ihre Ableitungen nach m und t .

Ich habe die Terme nach dem Horner-Schema definiert. Dadurch ist die Darstellung kompakter und die Auswertung effizienter. Ausserdem wirkt sich das Horner-Schema positiv auf das Verhalten von Rundungsfehlern aus.

According to the modular system we can assemble the subcomponents of the Jacobi matrix. Vectors $v1$, $v2$ and $v3$ are representing the sub-functions $f1$, $f2$ and $f3$ and their derivatives wrt m and t .

I defined the expressions following the Horner procedure. This makes presentation more compact and evaluation more efficient. Additionally this treatment has a positive effect on the behaviour of rounding errors.

Expressions #60 and #61 are so bulky that I don't print them here. I'd like to invite you inspecting the original DERIVE file.

This are $G(b, m, v1, v2, v3)$ and $G(b, m, (F(b, m, t))_1, (F(b, m, t))_2, (F(b, m, t))_3)$.

You can see only the first part of the first module. Josef

$$\#60: G(b, m, v1, v2, v3) := \left[\begin{array}{l} \frac{v1_1}{v2_1} + \frac{1}{m} - 1 - \frac{v1_1 \cdot v2_2}{v2_1^2} - \frac{2}{m} \cdot \frac{v1_3 + v1_1 \cdot \left(\ln(b) - \frac{v2_3}{v2_1} \right)}{v2_1} + \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \cdot \ln(b) \\ \\ \frac{v3_1}{v2_1} - \frac{v2_2 \cdot v3_1}{v2_1^2} - \frac{v3_3 + v3_1 \cdot \left(\ln(b) - \frac{v2_3}{v2_1} \right)}{v2_1} \end{array} \right]$$

Leider ist DERIVE damit überfordert diesen Ausdruck auszuwerten weil der Speicher nicht ausreicht. Doch mit etwas Übung und durch Anwendung grundlegender Ableitungsregeln können die interessierten Leser die Richtigkeit meiner Zerlegung auch per Hand verifizieren.

Damit sind wir nun endlich in der Lage aus den einzelnen Komponenten die Jacobi-Matrix zusammenzusetzen.

Unfortunately is DERIVE unable to evaluate this expression – lack on memory. But with some routine interested readers can verify my decomposition manually applying basic differentiation rules.

Finally we are able to compose the Jacobi-matrix of its components.

$$\#62: [Fr := F(b, m, r), Fs := F(b, m, s)]$$

$$\#63: \left[Gr := G(b, m, Fr_1, Fr_2, Fr_3), Gs := G(b, m, Fs_1, Fs_2, Fs_3) \right]$$

$$\#64: \text{JACOBI_MATRIX}(b, m, r, s) := \begin{bmatrix} b \cdot Gr_{1,2}^r - b \cdot Gs_{1,2}^s & b \cdot Gr_{1,3}^r & \\ & b \cdot Gr_{2,2}^r - b \cdot Gs_{2,2}^s & b \cdot Gr_{2,3}^r \\ Gr_{1,4} \cdot Gs_{2,3} + Gr_{1,3} \cdot Gs_{2,4} - Gr_{2,4} \cdot Gs_{1,3} - Gr_{2,3} \cdot Gs_{1,4} & Gr_{1,5} \cdot Gs_{2,3} - Gr_{2,5} \cdot Gs_{1,3} & \\ -b \cdot Gs_{1,3}^s & b \cdot Gr_{1,1}^r - b \cdot Gs_{1,1}^s & \\ -b \cdot Gs_{2,3}^s & b \cdot Gr_{2,1}^r - b \cdot Gs_{2,1}^s & \\ Gr_{1,3} \cdot Gs_{2,5} - Gr_{2,3} \cdot Gs_{1,5} & Gr_{1,3} \cdot Gs_{2,3} - Gr_{2,3} \cdot Gs_{1,3} & \end{bmatrix}$$

$$\#65: \text{JACOBI_MATRIX}(b, m, r, s) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dm} J1(b, m, r, s) & \frac{d}{dr} J1(b, m, r, s) & \frac{d}{ds} J1(b, m, r, s) & J1(b, m, r, s) \\ \frac{d}{dm} J2(b, m, r, s) & \frac{d}{dr} J2(b, m, r, s) & \frac{d}{ds} J2(b, m, r, s) & J2(b, m, r, s) \\ \frac{d}{dm} J3(b, m, r, s) & \frac{d}{dr} J3(b, m, r, s) & \frac{d}{ds} J3(b, m, r, s) & J3(b, m, r, s) \end{bmatrix}$$

Unser Newton-Verfahren ist fast fertig. Was uns jetzt noch fehlt sind die Startwerte für m , r und s und die Einschränkung von r und s auf ein Lösungs-Intervall.

Damit das Newton-Verfahren zu einem sinnvollen Ergebnis konvergiert sind vernünftige Startwerte für die Variablen unerlässlich, die nicht allzuweit entfernt sind von den gesuchten Werten. Doch welche Startwerte für m , r und s sollen wir wählen? Diesbezüglich erweist sich die alternative Parametrisierung $\text{Schnecke_U}(b, m, \tau, \phi)$ einmal mehr als sehr hilfreich. Wenn wir uns den Aufbau dieser Funktion genauer anschauen, dann stellen wir fest, dass sie viele Gemeinsamkeiten mit dem Schneckenhaus vom Typ 1 besitzt. Unser räumliches Vorstellungsvermögen ist jetzt gefragt!

Typ 1 basiert auf einer Spirale in der YZ-Ebene. Die lokale mitdrehende X-Achse ist dort ein Vektor der senkrecht zur YZ-Ebene steht und der in Richtung der positiven globalen X-Achse zeigt. Die lokale mitdrehende Y-Achse steht senkrecht zur Normalen der YZ-Ebene und zeigt dabei weg vom Zentrum der Spirale.

Ganz ähnlich verhält es sich bei der Funktion $\text{Schnecke_U}(b, m, \tau, \phi)$. Sie basiert auf einer Spirale die sich auf der Oberfläche eines Kegels windet. Ihre lokale mitdrehende X-Achse steht auch senkrecht auf der Oberfläche des Kegels. Das lässt sich leicht zeigen.

The Newton-procedure is almost ready. What we are missing are the initial values for m , r , and s and the restriction on a solution interval for r and s .

In order to obtain a reasonable result from the Newton method it is a must to have appropriate initial values for the unknown which are not too far from the requested values. But which initial values should we choose? Once more the alternative parameterization $\text{Schnecke_U}(b, m, \tau, \phi)$ proves to be very helpful. Inspecting the structure of this function we can recognize many similarities with the type 1 snail shells. This is a challenge for our spatial sense!

p 44	Piotr Trebisz: A Mathematical Model for Snail Shells	D-N-L#82
------	--	----------

Type 1 is based on a spiral in the yz-plane. The local co-rotating x-axis is a vector perpendicular to the yz-plane directed to the positive global x-axis. The local co-rotating y-axis is perpendicular to the normal of the yz-plane directed out of the spiral centre.

Very similar is the situation with the function $\text{Schnecke_U}(b, m, t, \phi)$. It is based on a spiral winding on the surface of a cone. Its local co-rotating x-axis is perpendicular to the surface of the cone. This can easily be shown.

$$\#66: \text{LINIE}(b, m, t, m \cdot t + t) \cdot \text{SNAIL}(b, m, t) = 0$$

$$\#67: \text{LINIE}(b, m, t, m \cdot t + t) \cdot \frac{d}{dt} \text{SNAIL}(b, m, t) = 0$$

Die lokale mitdrehende X-Achse zeigt in Richtung der positiven globalen X-Achse

The local co-rotating x-axis shows in the direction of the positive global x-axis.

$$\#68: (\text{LINIE}(b, m, t, m \cdot t + t))_1 > 0$$

Die lokale mitdrehende Y-Achse steht senkrecht zur Normalen der Kegeloberfläche und zeigt weg vom Zentrum der Spirale

The local co-rotating y-axis is perpendicular to the normal of the surface of the cone and is directed out of the centre of the spiral.

$$\#69: \left| \text{Schnecke_U}\left(b, m, t, \frac{\pi}{2}\right) \right| > \left| \text{Schnecke_U}\left(b, m, t, -\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

Im Grunde ist $\text{Schnecke_U}(b, m, t, \phi)$ also nichts anderes als ein Schneckenhaus vom Typ 1, dessen YZ-Ebene zu einem Kegel zusammengefasst wird. Es ist daher nahe liegend für m , r und s dieselben Startwerte zu verwenden wie bei der Berechnung von m für das Schneckenhaus vom Typ 1.

Basically $\text{Schnecke_U}(b, m, t, \phi)$ is nothing else than a type 1 snail house, with its yz-plane folded to a cone. Hence it seems to make sense using the same initial values for m , r and s which we had calculating the m for the type 1 snail house.

$M_YZ(b, n)$ is defined like for Trebisz Spiral Type 1! (You can find it in the file!)

$$\#71: m_0 := M_YZ(b, n)$$

$$\#72: -\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \text{ATAN} \left(\frac{(m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b) \cdot \text{COT}(2 \cdot \pi \cdot r_0) - 2 \cdot \pi \cdot m_0^2}{\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2}} \right)$$

$$\#73: +\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \text{ATAN} \left(\frac{(m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b) \cdot \text{COT}(2 \cdot \pi \cdot s_0) - 2 \cdot \pi \cdot m_0^2}{\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2}} \right)$$

Für " r_0 " und " s_0 " bedeutet das: / This is for " r_0 " and " s_0 ":

$$\#74: r_0 = 1 - \frac{\text{ATAN} \left(\frac{(m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2}} \right)}{2 \cdot \pi}$$

$$\#75: s_0 = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2}} + 2 \cdot \pi \cdot m_0\right)}{2 \cdot \pi}$$

Mit der 1 vor dem negativen Arcus-Tangens-Term in der Funktion für r_0 wird dem Umstand Rechnung getragen, dass r_0 ungefähr eine Umdrehung weiter liegt als s_0 . Die Funktion für r_0 ist allerdings noch nicht ganz korrekt. Der Arcus-Tangens-Term von r_0 ist nämlich nicht stetig.

Wenn der Nenner in dem Arcus-Tangens-Term ...

The 1 in front of the negative arctan-expression is due to the fact that r_0 is approximatively one rotation in front of s_0 . The function for " r_0 " is not yet completely correct. The arctan-expression is not continuous.

When the denominator in this expression ...

$$\#76: \sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2} - 2 \cdot \pi \cdot m_0$$

... negativ wird, dann wird r_0 sprunghaft um 1/2 größer. Um das zu kompensieren führen wir einen Korrekturterm ein.

... becomes negative, then r_0 increases with a jump by 1/2. In order to compensate this we introduce a correcting expression.

$$\#77: r_0 = \frac{3 + \text{SIGN}(\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2} - 2 \cdot \pi \cdot m_0)}{4} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{\sqrt{((m_0^2 + 1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m_0^2}} - 2 \cdot \pi \cdot m_0\right)}{2 \cdot \pi}$$

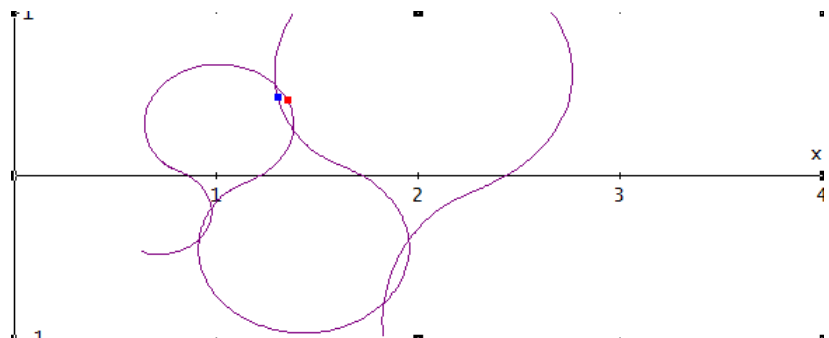
Es empfiehlt sich unsere theoretischen Annahmen über die Startwerte grafisch zu überprüfen

It is recommended to double check our theoretical assumptions about the initial values graphically.

Example:

SCHNITT(2, m_0 , t) ^
 SCHNITT(2, m_0 , s_0) ^
 SCHNITT(2, m_0 , r_0)

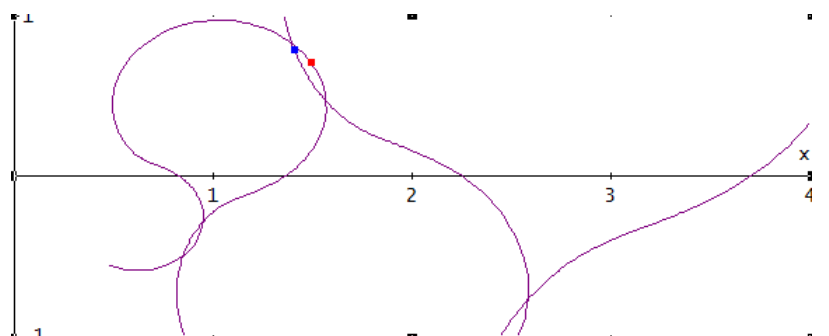
with $-1/2 \leq t \leq 3/2$



Example:

SCHNITT(e, m_0 , t) ^
 SCHNITT(e, m_0 , s_0) ^
 SCHNITT(e, m_0 , r_0)

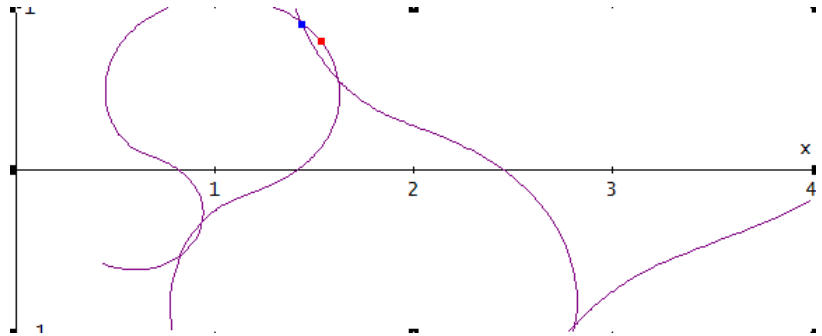
with $-1/2 \leq t \leq 3/2$



Example:

SCHNITT(3, m_0 , t) \wedge
 SCHNITT(3, m_0 , s_0) \wedge
 SCHNITT(3, m_0 , r_0)

with $-1/2 \leq t \leq 3/2$



Wie man sieht, liegen die Startwerte in der Tat nah bei den tatsächlichen Werten. Was jetzt noch fehlt ist die Einschränkung von r und s auf ein Lösungsintervall.

Dies ist notwendig da die Schnittkurve eine durchgehende Linie ist. Es besteht die Gefahr dass r und s entlang der Schnittkurve wandern bis sie sich irgendwo in der Mitte treffen. Wir müssen deshalb sicherstellen, dass r und s in den beiden Schleifen verbleiben wo sich die beiden Berührungspunkte befinden. Die beiden Schleifen beginnen und enden an den Nulldurchgängen der Y-Koordinate der Schnittkurve.

We can see that the initial values really are very close to the actual values. What is missing is the restriction of r and s on a solution interval.

This necessary because the intersection curve is one continuous line. There is the danger that r and s are moving along the intersection curve until they are meeting anywhere in the middle. So we have to make sure that r and s will remain in those both loops where the tangency points are lying. Both loops start and end at the zeros of the y-coordinate of the intersection curve.

$$\#78: \quad 0 = (\text{SCHNITT}(b, m, t))_2$$

$$\#79: \quad 0 = 2 \cdot \text{LN}(b) \cdot m \cdot b \cdot \frac{t \cdot ((m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t))}{(m^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) + 1) \cdot \text{LN}(b)^2 + 4 \cdot \pi \cdot m^2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \cdot (\pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - \text{LN}(b) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t))}$$

Eine Reihe möglicher Lösungen sind:

Some possible solutions are:

$$\#80: \quad t_1 = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m^2}\right)}{2 \cdot \pi} - \frac{1}{2} \vee t_2 = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m^2}\right)}{2 \cdot \pi} \vee t_3 = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m^2}\right)}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \vee t_4 = \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m^2}\right)}{2 \cdot \pi} + 1$$

Durch Ausprobieren können wir herausfinden in welchen Grenzen die beiden Schleifen liegen.

By experimenting we can find out the boundaries for the two loops.

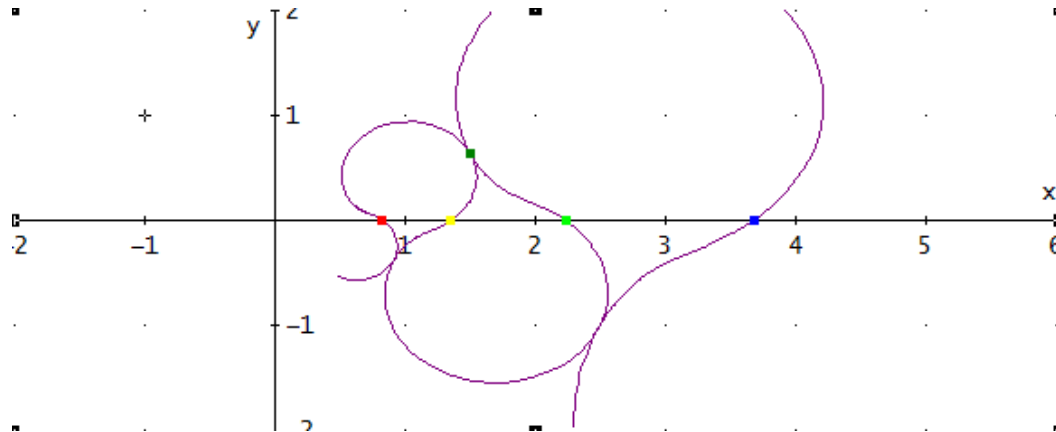
Example: $b = e \wedge m = 571877/1286241 \wedge -1/2 \leq t \leq 3/2$ and

SCHNITT(b, m, t_1) \rightarrow Rot / Red

SCHNITT(b, m, t_2) \rightarrow Gelb / Yellow

SCHNITT(b, m, t_3) \rightarrow Grün / Green

SCHNITT(b, m, t_4) \rightarrow Blau / Blue



Damit kennen wir jetzt die Lösungsintervalle auf die r und s eingeschränkt werden müssen.^[1]

Now we know the restrictions for the solution intervals for r and s .^[1]

$$\begin{aligned} \#81: & \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} < r < \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} + 1 \\ \#82: & \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} - \frac{1}{2} < s < \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m^2 + 1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} \end{aligned}$$

Und was passiert wenn im Laufe des Newton-Algorithmus r oder s das Intervall verlassen? Ganz einfach, wir setzen es auf einen neuen Startwert mit dem aktuellen m zurück.

Mit all den Erkenntnissen, die wir gewonnen haben sind wir nun endlich in der Lage den Newton-Algorithmus, der uns das passende m und die beiden Umdrehungszahlen r und s der beiden Berührungspunkte berechnet, in ein DERIVE-Programm zu gießen. Das Programm berechnet m , r und s auf n Stellen genau

And what will happen when r or s are leaving the solution interval during the Newton-algorithm? Easy answer: we start again with the actual m as new initial value.

Applying all our freshly acquired insights we are now able to bring the Newton algorithm which shall calculate the appropriate m and the two parameters r and s of both tangency points in the form of a DERIVE program. The following program returns the values of m , r , and s with an accuracy of n decimal places.

^[1] In his last mail Piotr gave a smaller interval for r and s together with the respective explication. You can find this improvement in the dfw-file.

$$\#83: I(b, m) := \left[\begin{array}{c} \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} + 1 \\ \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} - \frac{1}{2} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} \\ \frac{3 + \text{SIGN}(\sqrt{((m+1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2} - 2 \cdot \pi \cdot m)}{4} - \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{\sqrt{((m+1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2} - 2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} \\ \frac{\text{ATAN}\left(\frac{(m+1) \cdot \text{LN}(b)}{\sqrt{((m+1) \cdot \text{LN}(b))^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot m^2} + 2 \cdot \pi \cdot m}\right)}{2 \cdot \pi} \end{array} \right]$$

H(b, m, r, s, n) :=

```

Prog
[Br := Real(1, b), Bs := Real(1, b), RS := Vector]
[Fr := Vector, Fs := Vector, Gr := Vector]
[Gs := Vector, JM := Vector, ΔM := Vector]
WRITE(APPEND("m := ", APPROX(STRING(m), n)))
RS := APPROX(I(b, m), 2·n)
If ~ RS↓1↓1 < r < RS↓1↓2
  r := RS↓1↓3
If ~ RS↓2↓1 < s < RS↓2↓2
  s := RS↓2↓3
[Br := APPROX(b^r, 2·n), Bs := APPROX(b^s, 2·n)]
[Fr := APPROX(F(b, m, r), 2·n), Fs := APPROX(F(b, m, s), 2·n)]
#84: Gr := APPROX(G(b, m, Fr↓1, Fr↓2, Fr↓3), 2·n)
Gs := APPROX(G(b, m, Fs↓1, Fs↓2, Fs↓3), 2·n)
JM := [?, ?, ?, ?; ?, ?, ?, ?; ?, ?, ?, ?]
[JM↓1↓1 := Br·Gr↓1↓2 - Bs·Gs↓1↓2, JM↓1↓2 := Br·Gr↓1↓3]
[JM↓1↓3 := -Bs·Gs↓1↓3, JM↓1↓4 := Br·Gr↓1↓1 - Bs·Gs↓1↓1]
[JM↓2↓1 := Br·Gr↓2↓2 - Bs·Gs↓2↓2, JM↓2↓2 := Br·Gr↓2↓3]
[JM↓2↓3 := -Bs·Gs↓2↓3, JM↓2↓4 := Br·Gr↓2↓1 - Bs·Gs↓2↓1]
JM↓3↓1 := Gr↓1↓4·Gs↓2↓3 + Gr↓1↓3·Gs↓2↓4 - Gr↓2↓4·Gs↓1↓3 - Gr↓2↓3·Gs↓1↓4
JM↓3↓2 := Gr↓1↓5·Gs↓2↓3 - Gr↓2↓5·Gs↓1↓3
JM↓3↓3 := Gr↓1↓3·Gs↓2↓5 - Gr↓2↓3·Gs↓1↓5
JM↓3↓4 := Gr↓1↓3·Gs↓2↓3 - Gr↓2↓3·Gs↓1↓3
ΔM := [m, r, s] - (ROW_REDUCE(JM))↓4
RETURN APPROX(ΔM, n)

```

M_X(b, n) :=

```

Prog
[m0 := Real(0, ∞), r0 := Real(0, 1), s0 := Real(0, 1)]
V := Vector
#85: m0 := M_YZ(b, n)
r0 := APPROX((I(b, m0))↓1↓3, n)
s0 := APPROX((I(b, m0))↓2↓3, n)
V := ITERATES(H(b, m, r, s, n), [m, r, s], [m0, r0, s0])
RETURN V↓DIM(V)

```

Damit sind unsere konischen Schneckenhäuser vom Typ 2 endlich fertig! Man muss nur das passende m in die entsprechenden Formeln einsetzen:

Now our conic snail shells are finally ready. We only have to substitute the appropriate value for m into the respective formulae:

```

#86: SpiralfächeX_L(b, n, t, φ) := SpiralTorusX_L(b, (M_X(b, n))_1, t, φ)

```

```

#87: SpiralfächeX_U(b, n, t, φ) := SpiralTorusX_U(b, (M_X(b, n))_1, t, φ)

```

Die Differenz zwischen r und s entspricht genau einer Windung, also der Umdrehungszahl nach der sich der Mantelkreis des Schneckenhauses selbst berührt. Damit können wir eine dritte Variante des Schneckenhauses definieren, das nun nach der Windungszahl parametrisiert ist.

The difference between r and s corresponds to exact one twist, i.e. the winding number after which the surface of the snail house touches itself. So we are able to define a third form of the snail house which is parameterized according to its twist number.

#88: $u \in \text{Vector}$

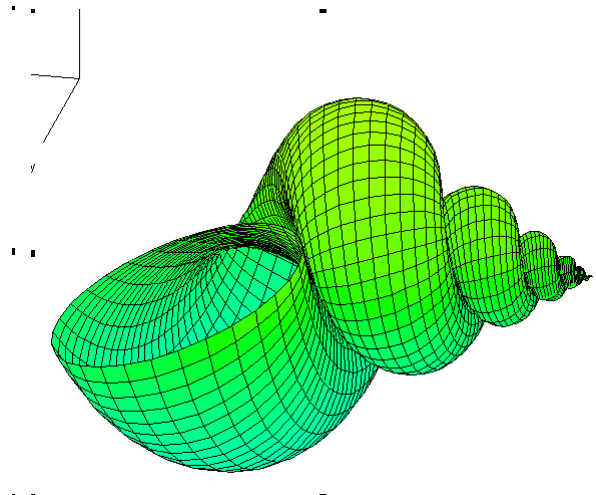
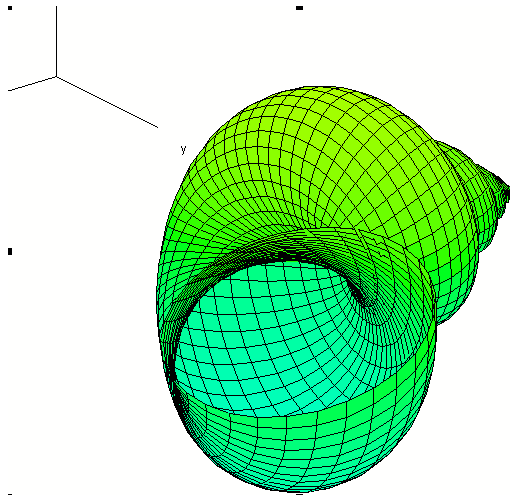
#89: $\text{SpiralTorusX_W}(b, u, t, \phi) := \text{SpiralTorusX_U}(b, u_1, t \cdot (u_2 - u_3), \phi)$

#90: $\text{SpiralFlächeX_W}(b, n, t, \phi) := \text{SpiralTorusX_W}(b, M_X(b, n), t, \phi)$

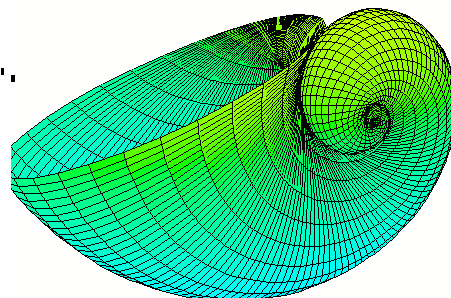
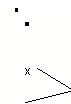
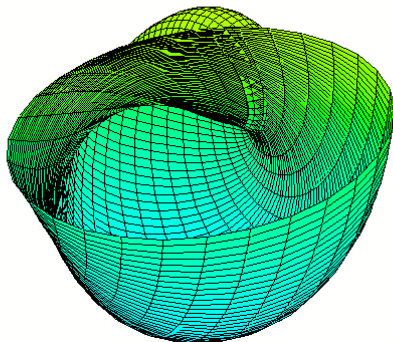
Unsere Anstrengungen werden mit ästhetischen 3D-Grafiken der Schneckenhäuser belohnt.

Our efforts are rewarded with esthetic 3D plots of the snail houses.

Base 2: $\text{SpiralFlächeX_W}(2, 3)$ ($-3 \leq s \leq 3$, 100 panels; $0 \leq t \leq 2\pi$, 50 panels)



Base 6: $\text{SpiralFlächeX_W}(6, 3)$ ($-2 \leq s \leq 0$, 100 panels; $0 \leq t \leq 2\pi$, 50 panels)

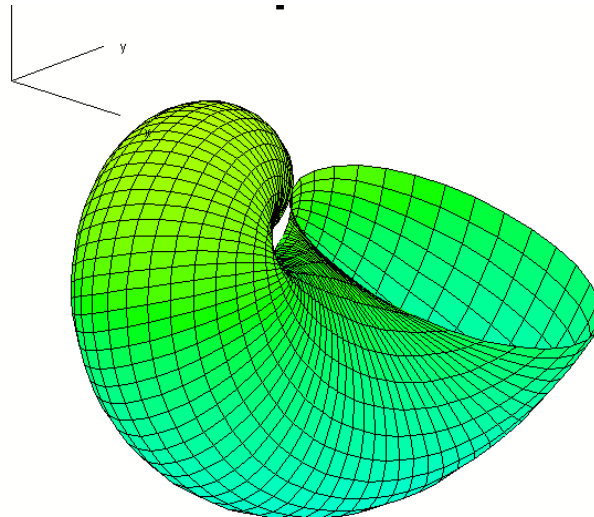


Basis e mit genau einer Windung:

Base e with exact one twist:

`SpiralFlächeX_W(e, 3)`

$(-1 \leq s \leq 30, 50 \text{ panels};$
 $0 \leq t \leq 2\pi, 50 \text{ panels})$



Important note: As mentioned earlier in DNL#81 only the mth-file can be used to plot the surfaces. We – Piotr and I – don't have any idea why the functions don't work when stored in dfw-format. I wrote to Albert Rich and hopefully I can deliver an explanation next time. Josef

I couldn't resist creating my own snail house. I am very curious, so let's have a look into the interior of the home of a snail!

`SpiralFlächeX_W(1.25, 3)` $(-3 \leq s \leq 3, 120 \text{ panels}; 0 \leq t \leq \pi, 30 \text{ panels})$
 (Box dimensions: 0,3; -1.5,1.5; -1.5,1.5)

