

Часть 1

Помощник по математике Derive

Алгебраическое окно

Оно открывается при запуске Derive, с некоторыми вычислениями показано на рисунке:

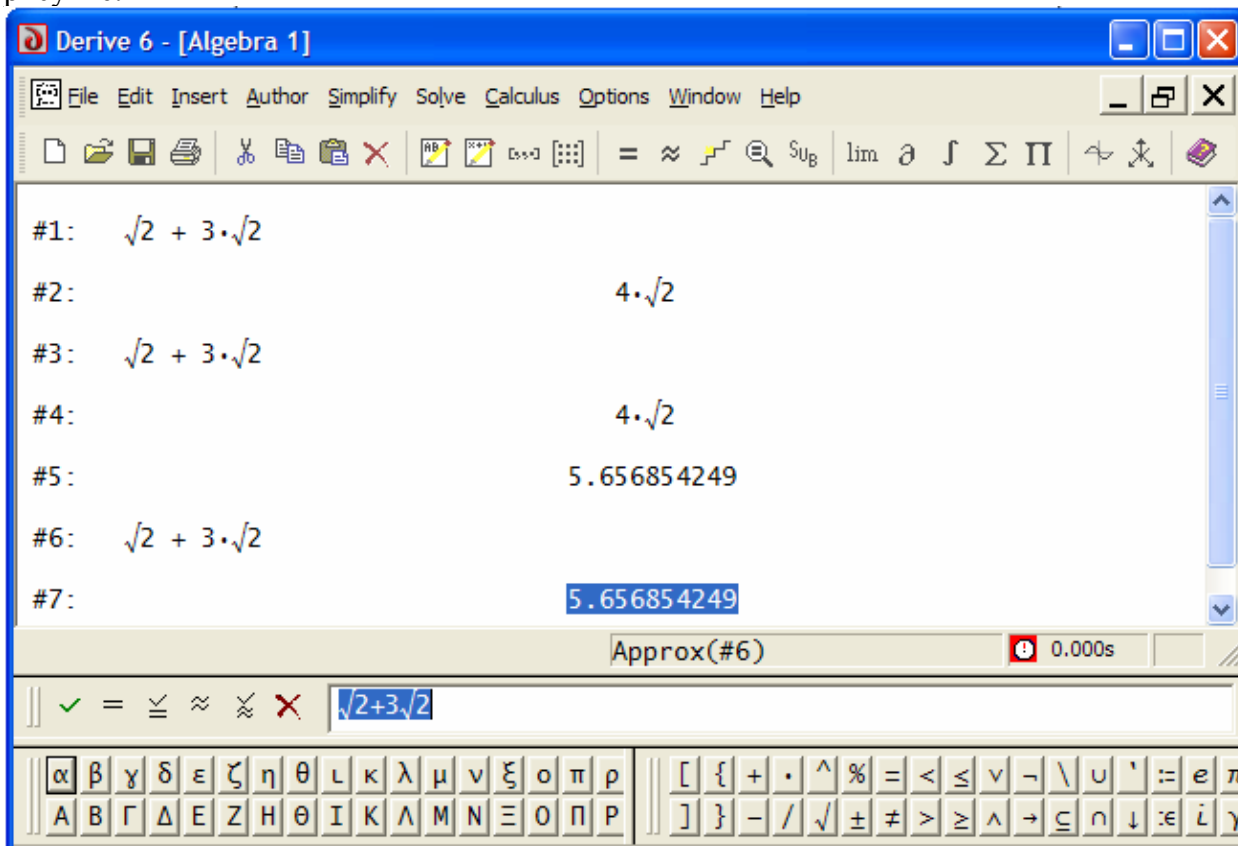


Рис. 1.1

Важнейшим элементом, обеспечивающим взаимодействие пользователя с системой, является строка Expression Entry (Вход выражения) – строка ЕЕ, имеющая окно записи выражения – окно ЕЕ и кнопки управления содержимым:



Рис. 1.2

Если указать стрелкой визира мыши границу строки ЕЕ и щелкнуть ЛКМ, то она выделится рамкой. После этого, не отпуская ЛКМ, ее можно переместить на листовое поле, где она принимает «плавающий» вид:

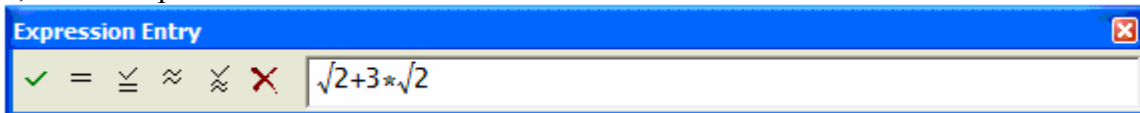




Рис. 1.3

Кнопкой  она, даже, удаляется. Возвращается или кнопкой  строки инструментов, или командой Expression меню Author:

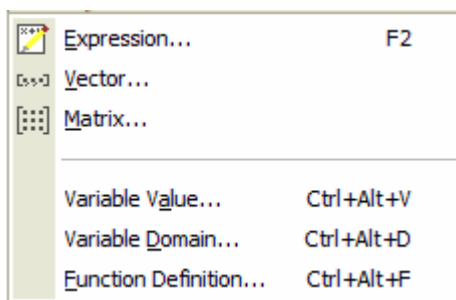


Рис. 1.4

Курсор ввода переводится в окно ЕЕ обычным образом – устанавливается визир мыши в форме I и делается щелчок ЛКМ. Данные набираются и редактируются в раскладке En, можно пользоваться клавишами <Delete> и <Backspace>, комбинациями <Shift>+<Insert>, <Ctrl>+<v> и т. д. Десятичная запятая заменяется точкой.

Кнопкой содержимое окна ЕЕ удаляет. Остальные кнопки строки ЕЕ возвращают на листовое поле:

- – содержимое, с выравниванием по левому краю, как и команда <Enter>;
- – результат, с выравниванием по центру;
- – и содержимое, и результат, как и команда <Ctrl> + <Enter>;
- – приближенную оценку результата, как и команда <Shift>+<Enter>;
- – и содержимое, и приближенную оценку результата.

В частности, если набрано $\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$, то поочередное нажатие слева направо кнопок строки ввода приводит к строкам листового поля, показанным на рисунке 1.1.

Арифметические операторы

- * – умножение;
- / – деление;
- + – сумма;
- - – разность;
- ^ – степень;
- % – процент.

Пример ([1], 1.033). Вычислить:

$$\frac{\left(\frac{5}{8} + 2\frac{17}{24}\right) : 2,5}{\left(1,3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{110}{401}} \cdot 0,5$$

Технология решения.

1. В окне ЕЕ записывается заданное выражение:

$$((5/8+2+17/24)/2.5)/((1.3+23/30+4/11)*110/401)*0.5$$

2. Нажимается кнопка , возвращающая на листовое поле и вычисляемое выражение, чтобы можно было проверить правильность записи выражения, и результат:

$$\frac{\frac{5}{8} + 2 + \frac{17}{24}}{2.5} \cdot 0.5$$

$$\frac{\left(1.3 + \frac{23}{30} + \frac{4}{11}\right) \cdot 110}{401}$$

#2:

1

Ответ: 1.

Ввод – вывод (основные параметры)

Командами Options/Mode Settings вызывается 3-страничное диалоговое окно установки режимов ввода-вывода:

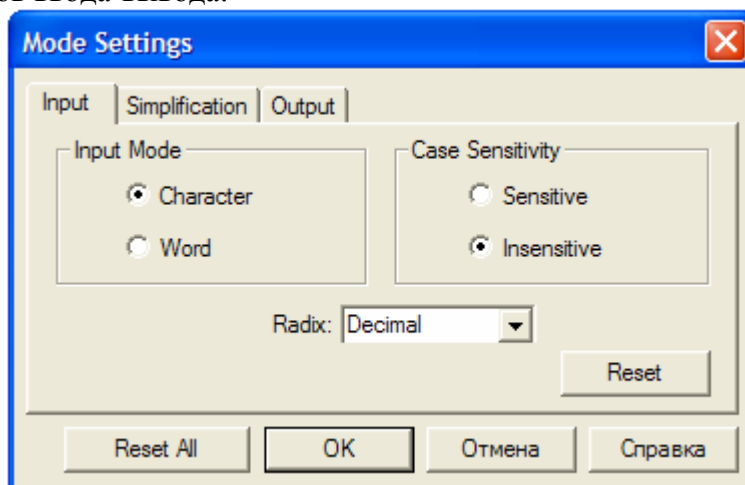


Рис. 1.5

На вкладке Input (Ввод) устанавливаются значения трех параметров:

- Input Mode – режим ввода,
- Case Sensitivity – существенность установки,
- Radix – система исчисления.

Значения параметра Input Mode:

- Character – символ,
- Word – слово.

Если выбран первый режим, то рядом стоящие символы считываются как разделенные знаком умножения. Как следствие, отпадает необходимость вводить знак умножения. Установив переключатель Input Mode в положение Word, пользователь от такого сервиса отказывается.

Значения параметра Case Sensitivity:

- Sensitivity – существенно,
- Insensitive – несущественно.

Если выбрано значение Insensitive и режим ввода Character, то, несмотря на данный режим, поддерживаются имена встроенных функций, то есть они не разбиваются на множители. В случае Sensitivity режим Character выполняется неукоснительно.

Изменения установок, заданных по умолчанию, автоматически фиксируются на листовом поле.

Страница Simplification (Упрощение):

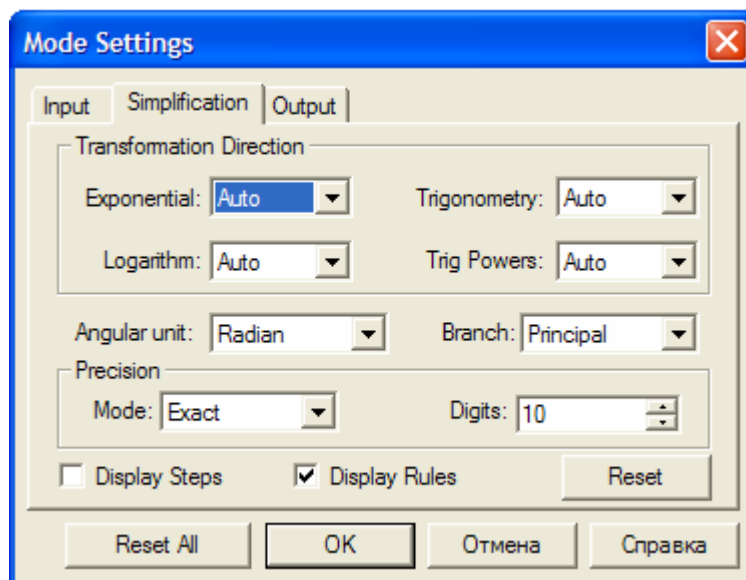


Рис. 1.6

Параметры страницы:

- Transformation Direction – вид преобразований,
- Angular unit – единицы измерения углов,
- Branch – ветви многозначных функций,
- Precision – точность вычислений.

Значения параметра Mode:

- Exact – точно,
- Approximate – приближенно,
- Mixed – смешанно.

Значения параметра Digits – число значащих цифр, по умолчанию 10.

Последняя страница Output (Вывод):

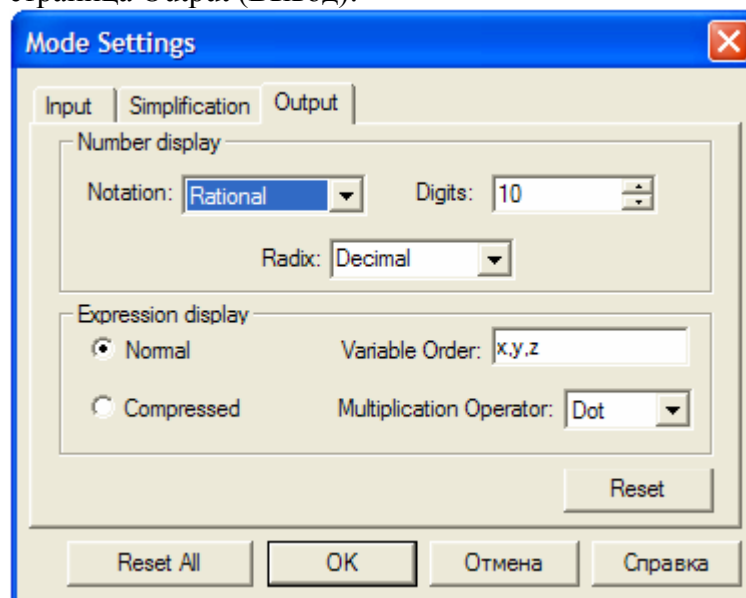



Рис. 1.7

На ней две группы параметров:

- Number display – изображение числа;
- Expression display – изображение выражения.

Параметром Variable Order определяется порядок следования переменных, параметром Multiplication Operator – символ умножения.


Ввод данных

Ключевую роль играет оператор присваивания (запоминания), обозначаемый $:=$. Его можно как записать клавишами $\langle := \rangle$, так и вставить кнопкой  панели математических символов основного окна.

Порядок присваивания переменной конкретного значения.

1. Запись в окне ЕЕ:

имя переменной $:=$ значение

2. Нажатие $\langle \text{Enter} \rangle$ или кнопки , что возвращает на листовое поле соответствующую запись.

Так получен следующий фрагмент листового поля:

#1: $x := 1$

#2: $y := 2$

Продолжение вычислений:

#3: $x + y$

#4: 3

Порядок задания функции пользователя аналогичен.

1. Запись в окне ЕЕ:


имя функции (имя переменной) $:=$ аналитическое выражение

2. Нажатие $\langle \text{Enter} \rangle$ или кнопки .

Например, так введена функция $f(x) = x^2$:

#1: $f(x) := x^2$

Пользователь может вычислять значения введенных функций и ссылаться на них.

Например, ввод $f(2)$ кнопкой  дает:

#2: $f(2)$

#3: 4

Встроенные константы и функции

Кнопка  вызывает панель справочной системы:

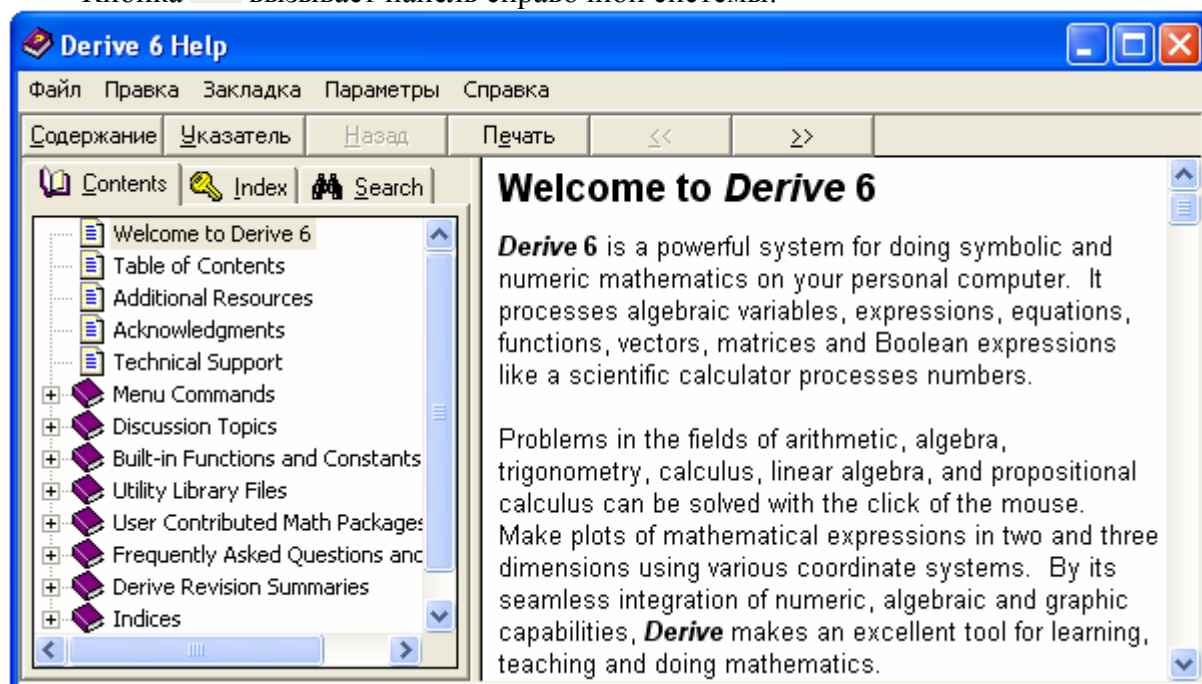




Рис. 1.8

Раскрытие списка Build-in Functions and Constants приводит к каталогу типов встроенных функций и констант. Кнопка  Indices открывает полный список встроенных функций, а кнопка  Index всех объектов.

Согласно справочной системе, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ представлены встроенными функциями $\operatorname{SIN}(x)$, $\operatorname{COS}(x)$, $\operatorname{TAN}(x)$, $\operatorname{COT}(x)$, соответственно. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ – $\operatorname{ASIN}(x)$, $\operatorname{ACOS}(x)$, $\operatorname{ATAN}(x)$, $\operatorname{ACOT}(x)$, соответственно. Логарифмы $\log_a b$ обозначены $\operatorname{LOG}(b,a)$.

Имена встроенных функций можно набирать строчными буквами, на листовое поле они автоматически вставляются прописными.

Пример ([2], 5.16.12). Вычислить $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

Технология решения. Запись в окно ЕЕ вычисляемого выражения:

$$\log(4,5)\log(5,6)\log(6,7)\log(7,8)$$

Нажатие кнопки  дает:


#1:

$$\frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример ([2], 3.7.13). Вычислить:

$$\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$$

Технология решения. Командами Options / Mode Settings / Simplification открывается диалоговое окно 1.6 и устанавливается значение Degree параметра Angular unit. В окне ЕЕ, используя кнопку , записывается заданное выражение:

$$\cos(10^\circ)\cos(50^\circ)\cos(70^\circ)$$

Нажатие кнопки  дает:

#1: Angle :: Degree

#2:

$$\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Пример ([1], 3.156). Вычислить:

$$\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{12}{13}\right).$$

Строки решения:

#1: $\operatorname{TAN}\left(2 \cdot \operatorname{ACOS}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$




#2:

$$\frac{120}{119}$$

Ответ: $\frac{120}{119}$.

Выполнение алгебраических преобразований

Команда Simplify (Упростить) занимает в Derive особое положение, она представлена целой группой кнопок, в том числе:

-  – в строке Expression Entry;
-  – в строке Expression Entry;
-  – в строке инструментов Derive.

Первые две из них обрабатывают содержимое окна выражений, последняя – выделенное выражение листового поля.

Пример ([1], 2.001). Упростить

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

Технология решения. Запись в окне EE заданного выражения:

$$(\sqrt{x}+1)/(x\sqrt{x}+x+\sqrt{x})*(x^2-\sqrt{x})$$

Нажатие кнопки  возвращает на листовое поле результат преобразований:

#1:

$$x - 1$$

Ответ: $x-1$.

Кнопка Simplify панели меню, когда на листовом поле выделено выражение, открывает список инструментов группы Simplify:

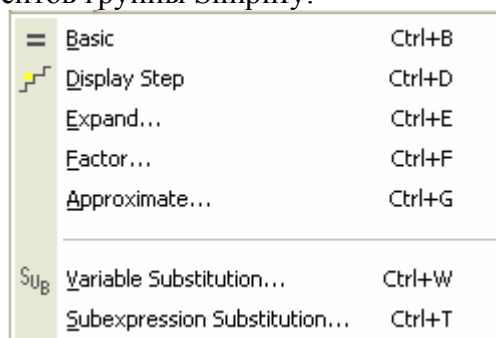


Рис. 1.9

Назначения инструментов первой группы:

- Basic – выполнить и вернуть точный результат,
- Display Step – представить пошаговое решение,
- Expand – разложить в сумму;
- Factor – разложить в произведение,
- Approximate – оценить результат.

По команде Approximate появляется инструмент:

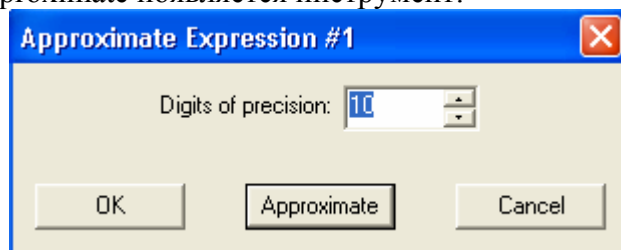


Рис. 1.10

Следующий пример показывает, что команда Approximate может вернуть более компактный результат, чем остальные команды группы Simplify.

Пример ([1], 2.002). Упростить

$$((\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q})^{-2} + (\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q})^{-2}) : \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{p - q}$$

Технология решения. Ввод в окно выражений:

$$((p^{1/4}-q^{1/4})^{-2}+(p^{1/4}+q^{1/4})^{-2})*(p-q)/(\sqrt{p}+\sqrt{q})$$

Нажатие кнопки $\frac{\square}{\square}$ дает:

#1:

$$\frac{2 \cdot (p^{3/4} + \sqrt{p} \cdot q^{1/4} + \sqrt{q} \cdot p^{1/4} + q^{3/4})}{(p^{1/4} - q^{1/4}) \cdot (p^{1/4} + q^{1/4})^2}$$

Однако если нажать не кнопку $\frac{\square}{\square}$, а кнопку \approx , то результат будет более компактным:

#1:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(p^{0.25} + q^{0.25}) \cdot (p^{0.25} - q^{0.25})}$$

Продолжение решения. Выделение знаменателя, полученной дроби, а для этого он указывается стрелкой визира мыши, и проводятся щелчки ЛКМ., пока выражение не примет вид:

#1:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(p^{0.25} + q^{0.25}) \cdot (p^{0.25} - q^{0.25})}$$

Командами Simplify/Expand вызывается инструмент Expand, нажатие кнопки Expand приводит к окончательному результату:

#2:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}$$

Ответ: $\frac{2(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}.$

Достаточно высокий уровень математической строгости системы Derive, по выполнению действий со степенями, подтверждает, в частности, следующий пример.

Пример ([1], 2.162) Упростить выражение

$$\frac{a^2 + 4}{a \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}$$

Технология решения. Запись в окно ЕЕ заданного выражения:

$$(a^2 + 4)/a/\sqrt{(((a^2 - 4)/2/a)^2 + 4)}$$

Нажатие кнопки $\frac{\square}{\square}$ дает:

#1:

$$2 \cdot \text{SIGN}(a)$$

Остается учесть, что

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ответ: 2, если $a > 0$, -2, если $a < 0$.

В следующих примерах упрощаются числовые выражения с корнями.

Пример ([1], 2.126) Проверить справедливость равенства

$$(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$$

Строки решения:

$$\#1: (4 + 15^{1/2}) \cdot (10^{1/2} - 6^{1/2}) \cdot (4 - 15^{1/2})$$

#2: 2

Ответ: равенство верно.

Пример ([1], 2.291) Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$$

Строки решения:

$$\#3: (9 + 80^{1/2})^{1/3} + (9 - 80^{1/2})^{1/3}$$

#4: 3

Ответ: равенство верно.

Пример. Вычислить

$$\frac{\sqrt{30 - 12\sqrt{6}}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} (5 + 2\sqrt{6})$$

Строки решения:

$$\#1: \frac{\sqrt{(30 - 12 \cdot \sqrt{6})}}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} \cdot (5 + 2 \cdot \sqrt{6})$$

#2: 1

Ответ: 1

Команды второй группы меню Simplify (рис. 1.9) вызывают инструменты подстановок:

- Variable Substitution – замены переменной,
- Subexpression Substitution – замены части выражения.

В случае, когда выделенное на листовом поле выражение содержит переменные a, b , щелчок ЛКМ по строке Variable Substitution меню Simplify, или кнопке SUB панели инструментов, открывает диалоговое окно:

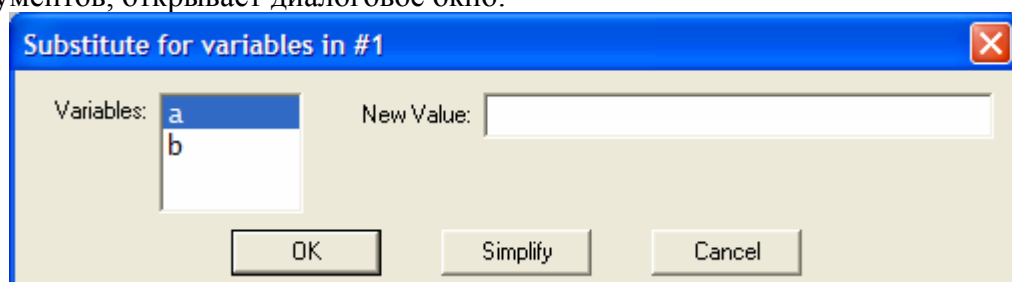


Рис. 1.11

В поле Variables выделяется нужная переменная, а в поле New Value вводится выражение, которым она заменяется. Кнопка OK возвращает на листовое поле встроенную функцию, заданной подстановки, а кнопка Simplify – результат подстановки.

На рисунке 1.12 диалоговое окно подстановок второго вида. Заменяемая часть выражения выделяется, в поле New Value вводится обозначение. Если переключатель Occurrences находится в положении One, то проводится замена только выделенного выражения, а если в положении All, то всех таких выражений.

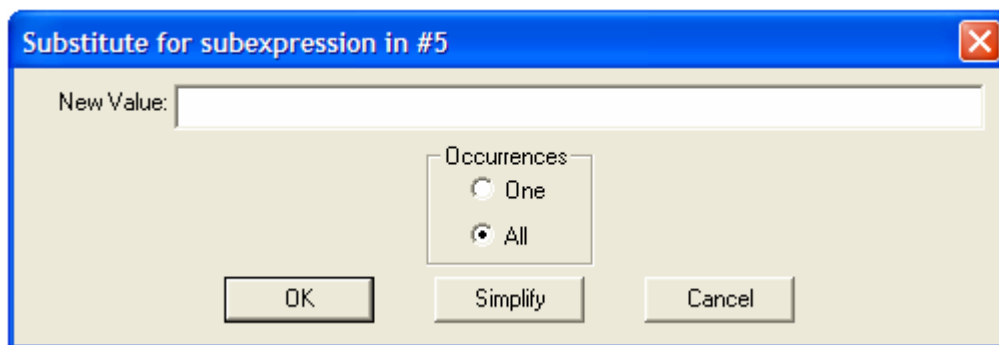


Рис. 1.12

Оба вида подстановок проводятся встроенной функцией SUBST. Примеры:

#1: $\text{SUBST}(1 + x^2, x, t^2)$

#2: $t^4 + 1$

#3: $\text{SUBST}(1 + x^2, x^2, t)$

#4: $t + 1$

Пример ([1], 2.170) Упростить выражение

$$\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2|-a^2+4}.$$

Технология решения. Выражение записывается в окне ЕЕ:

$$(a^3+a^2-2a)/(a*abs(a+2)-a^2+4)$$

Нажатие кнопки  дает:

#1:
$$\frac{a \cdot (a - 1)}{a \cdot \text{SIGN}(a + 2) - a + 2}$$

Выделяется функция SIGN(a+2):

#1:
$$\frac{a \cdot (a - 1)}{a \cdot \text{SIGN}(a + 2) - a + 2}$$

Вызывается диалоговое окно 1.12 и в поле New Value задается значение 1. Тогда кнопка Simplify возвращает:

#2:
$$\frac{a \cdot (a - 1)}{2}$$

Снова в строке #1 выделяется функция SIGN(a+2) и открывается диалоговое окно 1.12, но задается значение -1. В этом случае кнопка Simplify возвращает:

#3:
$$-\frac{a}{2}$$

Ответ: $-\frac{a}{2}$, если $a + 2 < 0$; $\frac{a(a-1)}{2}$, если $a + 2 > 0$.

Выполнение тригонометрических преобразований

Командами Options/Mode Settings/Simplification/ Trigonometry открывается список:
Auto – автоматически; Collect – сгруппировать; Expand – раскрыть.

Пусть установлено:

#2: Trigonometry := Expand

Тогда поддерживаются следующие тригонометрические формулы:

#3: $\cos(x + y)$

#4: $\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

#5: $\sin(x + y)$

#6: $\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)$

#7: $\tan(x + y)$

#8:
$$\frac{\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)}{\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)}$$

#9: $\cos(2 \cdot x)$

#10: $2 \cdot \cos^2(x) - 1$

#11: $\sin(2 \cdot x)$

#12: $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

#13: $\tan(2 \cdot x)$

#14:
$$\frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{2 \cdot \cos^2(x) - 1}$$

Формулы, преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, поддерживаются, если установлено направление Collect:

#15: Trigonometry := Collect

#16: $\cos(x) \cdot \cos(y)$

#17:
$$\frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$$

#18: $\sin(x) \cdot \sin(y)$

#19:
$$\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$$

#20: $\cos(x) \cdot \sin(y)$

#21:
$$\frac{\sin(x + y) - \sin(x - y)}{2}$$

Можно воспользоваться формулами понижения степени, в частности:

#22: $\cos^2(x)$

#23: $\frac{\cos(2 \cdot x)}{2} + \frac{1}{2}$

#24: $\sin^2(x)$

#25: $\frac{1}{2} - \frac{\cos(2 \cdot x)}{2}$

Есть даже такая полезная формула:

#26: $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$

#27: $\sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \text{SIGN}(a) \cdot \cos\left(\text{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right) - x\right)$

Минус один – нет формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример ([1], 3.011) Доказать тождество

$$(\sin x)^{-1} + (\tan x)^{-1} = \cot \frac{x}{2}.$$

Строки решения:

#28: $\sin^{-1}(x) + \tan^{-1}(x)$

#29: $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

Ответ: тождество верно

Пример ([1], 3.043) Доказать тождество

$$\frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

Технология решения. Упрощение левой части:

#30: $\frac{1 - 2 \cdot \sin^2(x)}{1 + \sin(2 \cdot x)}$

#31: $\cot\left(\frac{4 \cdot x + \pi}{4}\right)$

Упрощение правой части:

#32: Trigonometry := Expand

#33:
$$\frac{1 - \tan(x)}{1 + \tan(x)}$$


#34:
$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$$

#35: Trigonometry := Collect

#36:
$$\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ответ: тождество верно.

Геометрическое окно 2D-plot

Вызывается командами Window/New 2D-plot Window, или кнопкой , или клавишами <Ctrl>+<2>. Оно имеет (рис. 1.13) свою основную панель, строку состояний и т. д. Большую часть окна занимает область построений, снабженная системой координат.

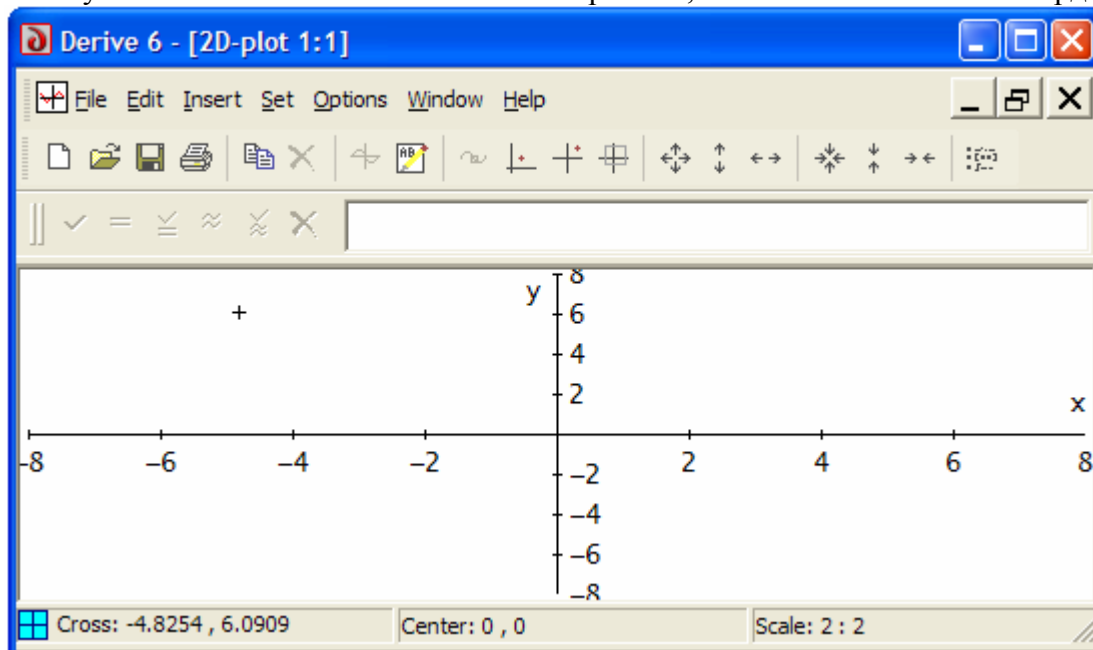
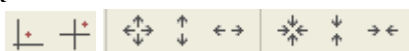


Рис. 1.13


Кнопка  инструментов 2D-plot позволяет мгновенно вернуться в алгебраическое окно.

Визир + области построения называется графическим курсором, координаты точки, отмеченной им, автоматически указываются в строке состояний – параметр Cross. Указав стрелкой визира мыши точку области построения и нажав ЛКМ, его можно перенести в нее. Графический курсор также перемещается клавишами управления курсором. В последнем случае, удерживание клавиши <Ctrl>, увеличивает шаг перемещения.

Обозначения кнопок



соответствуют их назначениям, с их помощью задаются нужные диапазоны изменения переменных. Правые шесть кнопок – кнопки группы Zoom.

Важнейшей кнопкой панели инструментов окна 2D-plot является кнопка , щелчок ЛКМ по ней – команда «Вставить график в область построения». Данная команда отдается также:

- клавишей <F4>, когда курсор ввода находится в области построения, что далее предполагается всегда выполненным, если она используется;
- командами Insert/Plot;
- командой Insert Plot контекстного меню, открываемого щелчком ПКМ в области построения:



Рис. 1.14

Порядок построения графика функции $y = f(x)$.

1. Открывается диалоговое окно 2D-plot.
2. В окно выражений вводится $f(x)$.
3. Нажимается <Enter> или кнопка
4. Кнопкой график функции вставляется в область построения.

Так построен график функции $y = \sin(x)$, показанный на рисунке 1.15.

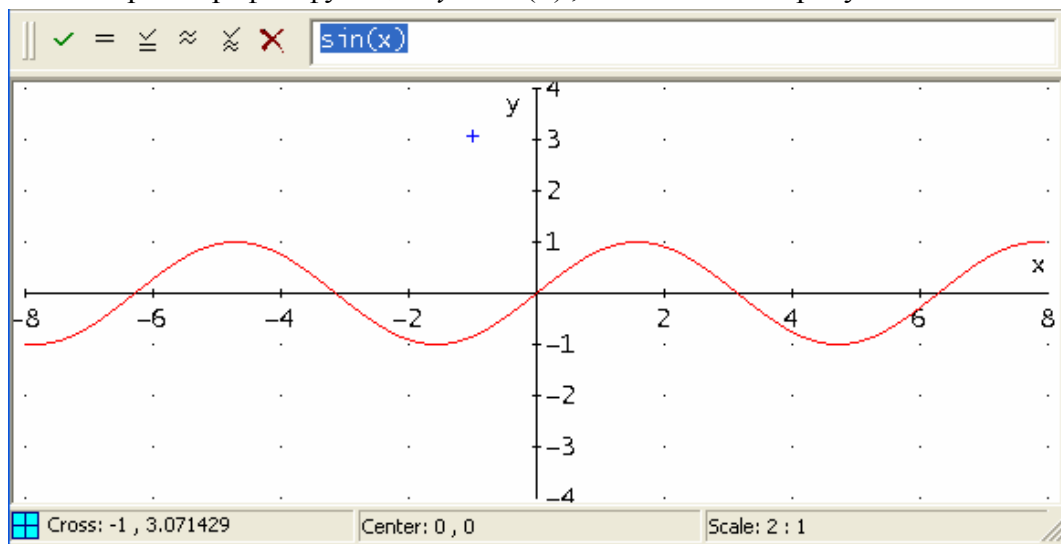


Рис. 1.15

Если в одной системе координат требуется построить графики двух функций, то, после построения первого графика, в авторское окно вводится аналитическое выражение второй функции и шаги 3, 4 повторяются. Кстати, очень удобная технология.

Кнопкой инструментов 2D-plot включается режим Trace Plots, в котором графический курсор принимает форму квадрата и автоматически помещается на построенную линию. В данном режиме он перемещается только по линии, что позволяет в поле Cross строки состояний считывать координаты ее точек.

Кнопкой инструментов 2D-plot включается режим Set Range, развертывания выделенной прямоугольной области во все окно.

Командой Display Options контекстного меню 1.14 вызывается мощное диалоговое окно установки параметров изображения (приводится частично):

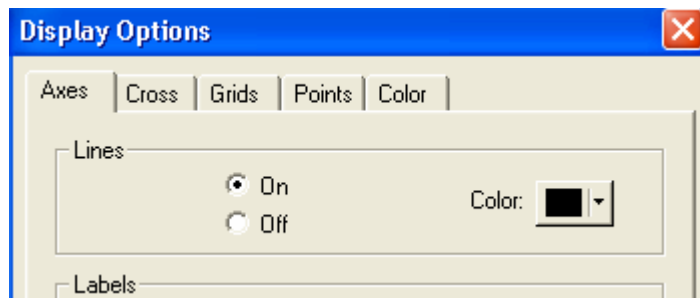


Рис. 1.16

Страницы диалогового окна:

- Axes – оси,
- Cross – графический курсор,
- Grids – линии сетки,
- Points – точки,
- Color – цвет.

Положения переключателя:

- On – изобразить,
- Off – скрыть.

1. Пусть требуется построить точки $A(-2,3)$, $B(-1,2)$, $C(1,4)$.

1. Открывается диалоговое окно 2D-plot.
2. В окно выражений вводится: $[[-2,3],[-1,2],[1,4]]$, что эквивалентно $([-2,3;-1,2;1,4])$.
3. Нажимается кнопка или <Enter>.
4. Нажатие кнопки приводит к построению точек:

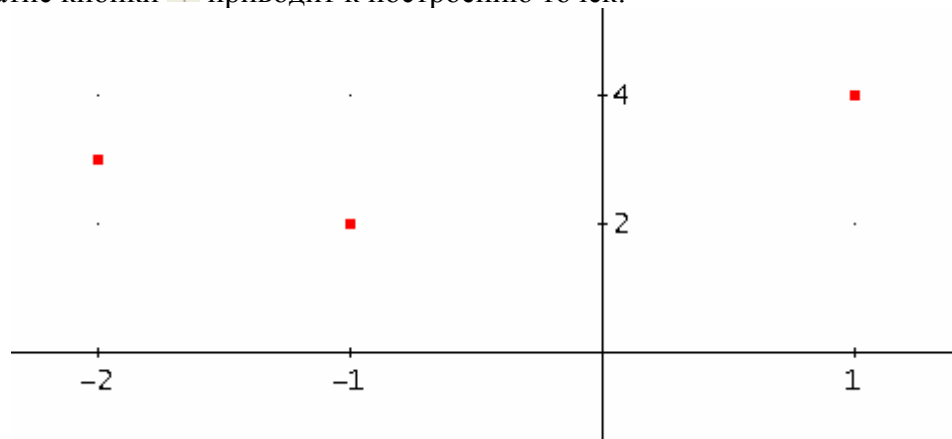


Рис. 1.17

С помощью кнопки можно ввести обозначения точек. Допустим, что надо построить еще и отрезки $[A,B]$, $[B,C]$. Тогда решение продолжается.

5. Открывается диалоговое окно 1.43 на вкладке Points и устанавливается:

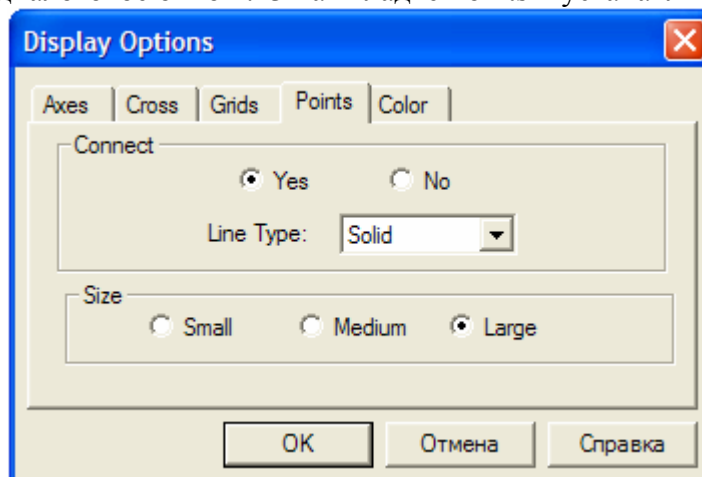


Рис. 1.18

Поддерживаемые типы линий:

- Solid - сплошная,
- Dash –штриховая,
- Dot – точечная,
- DashDot –штрихи разделяются точкой,
- DashDotDot – штрихи разделяются двумя точками.

7. Нажимается ОК.

8. Кнопка  возвращает:

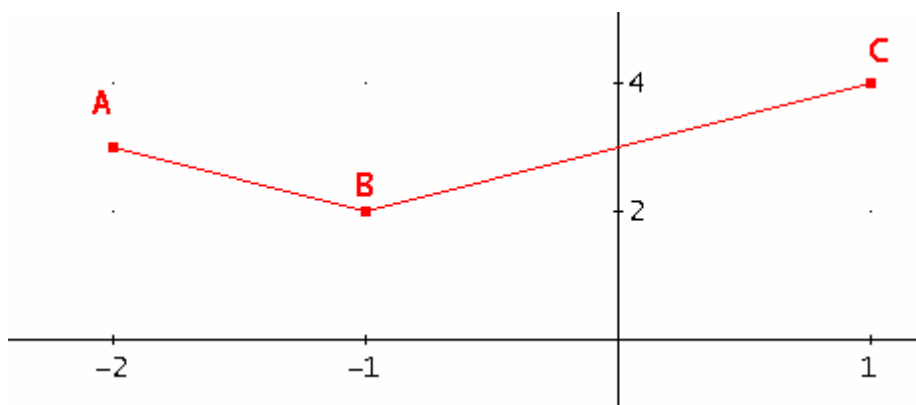




Рис. 1.19

2. Построение параметрически заданных линий рассматривается на примере построения эллипса $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $-\pi \leq t < \pi$.

1. Открывается диалоговое окно 2D-plot.

2. В окно выражений вводится $[2\cos(t), \sin(t)]$.

3. Нажимается кнопка .

4. Кнопкой  вызывается диалоговое окно, задания параметров параметрически заданной функции, и устанавливается в нем:

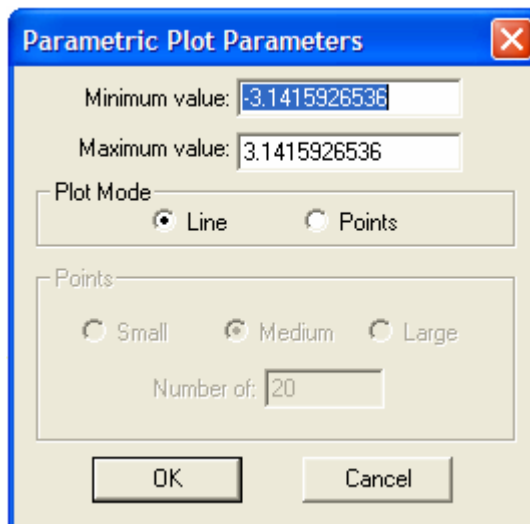


Рис. 1.20

5. Нажатие ОК дает:

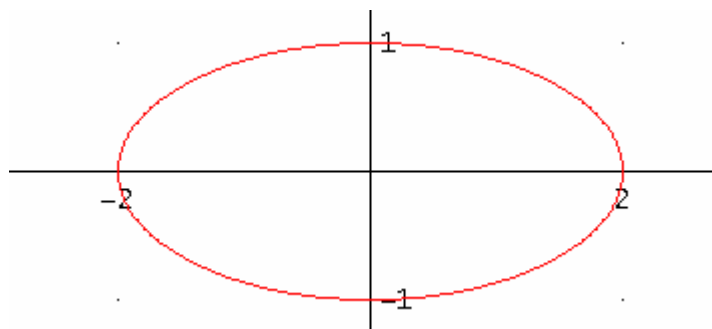


Рис. 1.21

3. Заливка фигур

Стандартная схема построения графика, когда вводится $[f(x), 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b]$, приводит к построению и заливке заданного множества точек.

Пример, когда введено $[3/x, 0 \leq y \leq 3/x \wedge 1 \leq x \leq 3]$, на рисунке 1.22.

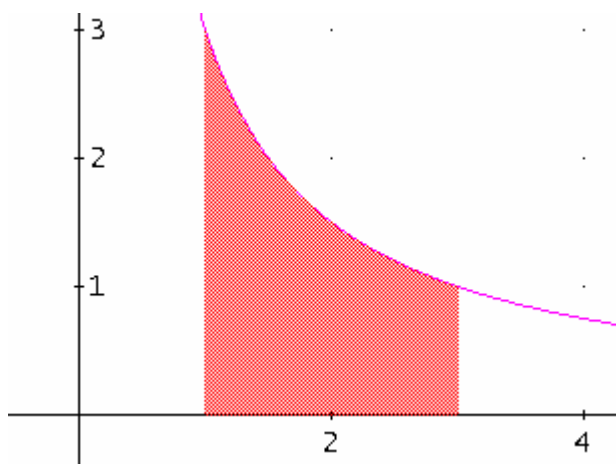


Рис. 1.22

Аналогично действует ввод $[f(x), g(x), f(x) \leq y \leq g(x) \wedge a \leq x \leq b]$.

Пример, когда введено $[5/x, 6-x, 5/x \leq y \leq 6-x \wedge x \geq 0]$, на рисунке 1.23.

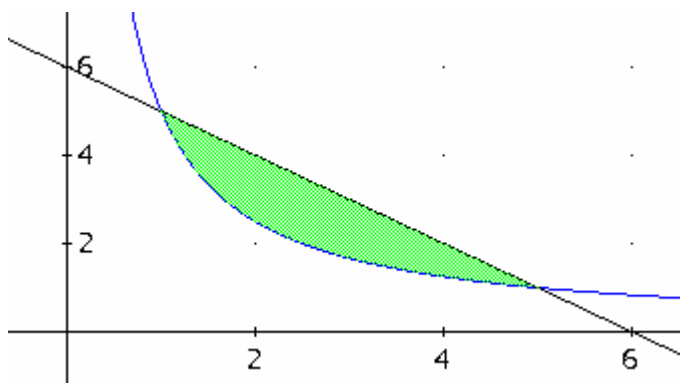




Рис. 1.23

Инструмент Author matrix

Кнопка  вызывает диалоговое окно Matrix Setup, задания размеров матрицы. По команде ОК появляется окно ввода элементов матрицы.

Инструмент Author vector

Кнопка  вызывает диалоговое окно Vector Setup, в котором задается число элементов вектора. После задания этого числа, по команде ОК, появляется диалоговое окно для ввода элементов вектора. Остается заполнить его поля и нажать ОК.

Ввести вектор можно и без инструментов, непосредственным вводом в окно ЕЕ его элементов, разделенных запятыми, заключая их в общие квадратные скобки.

В векторах-столбцах элементы задаются (возвращаются), разделенные точкой с запятой <;>.

Заключение вектора в прямые скобки, как и встроенная функция ABS, возвращает его модуль:

#1: $\| [x, y, z] \|$


#2: $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

Произведение векторов (одной размерности) понимается как скалярное произведение векторов:

#3: $[x, y, z] \cdot [u, v, t]$

#4: $u \cdot x + v \cdot y + t \cdot z$

Инструмент Solve Expression

Командами Solve/Expression, как и кнопкой  основной панели, когда на листовом поле выделено выражение, вызывается диалоговое окно:

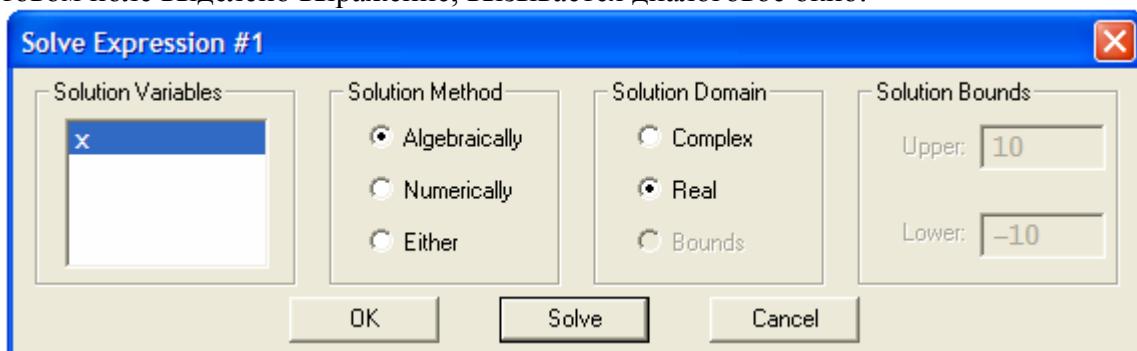


Рис. 1.24

Входящие параметры:

- Solution Variables – выражаемые переменные;
- Solution Method – метод решения;
- Solution Domain – область решения;
- Solution Bounds – границы решения.


Значения параметра Solution Method:

- Algebraically – алгебраически (символьно),
- Numerically – численно (для уравнений),
- Either – по умолчанию.

Значения параметра Solution Domain:

- Complex – множество комплексных чисел,
- Real – множество действительных чисел,
- Bounds – на заданном отрезке (если уравнение решается численно).



Поля Upper (Верхняя) и Lower (Нижняя) становятся активными, когда переключатель Solution Domain находится в положении Bounds.

Кнопкой OK на листовое поле вставляется встроенная функция SOLVE, с заданными значениями параметров, возвращающая, после нажатия кнопки  панели инструментов, результат. Кнопка Solve вставляет одновременно и то, и другое.

Следует учитывать, что инструмент Solve Expression может возвращать посторонние корни уравнений, с точки зрения школьной программы по математике. Поэтому, применяя его к уравнению, определенному не на всем множестве действительных чисел, надо или делать проверку корней, или, что более рационально, решать его совместно с неравенствами, определяющими ОДЗ (область допустимых значений). То же самое относится к системам уравнений.

1. Технология решения уравнений

Пусть надо решить некоторое уравнение $f(x) = 0$.

1. Оно записывается в окно ЕЕ.
2. Нажимается <Enter> или кнопка .
3. Кнопкой  вызывается инструмент Solve Expression.
4. Задаются значения параметров, как на рисунке 1.24.
5. Нажатие кнопки Solve инструмента Solve Expression возвращает встроенную функцию SOLVE и результат – корни уравнения, соединенных, если их несколько, символом логического сложения \vee .

Пример([1], 6.136) Решить алгебраическое уравнение:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2$$

Строки решения:

#2:
$$\text{SOLVE}\left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2, x, \text{Real}\right)$$

#3:
$$x = 1$$

Ответ: 1.

Пример ([1], 6.031) Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$$

Технология решения. Вводится вектор, состоящий из уравнения и условий неотрицательности подкоренных выражений. Применение инструмента Solve Expression дает:

#2:
$$\text{SOLVE}([\sqrt{3 \cdot x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2 \cdot \sqrt{x}, 3 \cdot x + 4 \geq 0, x - 4 \geq 0, x \geq 0], x, \text{Real})$$

#3:
$$[x = 4]$$

Ответ: 4.

Если не вводить ОДЗ уравнения, то появится посторонний корень:

#5:
$$\text{SOLVE}(\sqrt{3 \cdot x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2 \cdot \sqrt{x}, x, \text{Real})$$

#6:
$$x = -\frac{4}{3} \vee x = 4$$

Пример. Решить логарифмическое уравнение:

$$\lg x = \lg \frac{3}{x + 2}$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}\left(\left[\text{LOG}(x, 10) = \text{LOG}\left(\frac{3}{x+2}, 10\right), x > 0, x+2 > 0\right], x, \text{Real}\right)$

#3: $[x = 1]$

Ответ: 1.

Если не вводить ОДЗ уравнения, то появится посторонний корень:

#5: $\text{SOLVE}\left(\text{LOG}(x, 10) = \text{LOG}\left(\frac{3}{x+2}, 10\right), x, \text{Real}\right)$

#6: $x = -3 \vee x = 1$

Пример. Решить показательное уравнение

$$5^{x+1} - 2 \cdot 9^{x-1} = 4 \cdot 5^x + 3^{2x-1}$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}(5^{x+1} - 2 \cdot 9^{x-1} = 4 \cdot 5^x + 3^{2x-1}, x, \text{Real})$

#3: $x = 1$

Ответ: 1

Пример. Решить уравнение, содержащее модуль:

$$5x^2 + |x+7| - 13 = 0$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}(5 \cdot x^2 + |x+7| - 13 = 0, x, \text{Real})$

#3: $x = -\frac{6}{5} \vee x = 1$

Ответ: $-\frac{6}{5}, 1$.

2. Технология решения неравенств. Когда решается неравенство, то неравенства, определяющие ОДЗ, присоединяются автоматически. Здесь вопрос только в том, сможет инструмент SOLVE вернуть результат или нет, и если нет, то, как заменить неравенство равносильной совокупностью, чтобы получить результат.

Пример ([1], 9.022) Решить дробно-рациональное неравенство

$$\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1, x, \text{Real}\right)$

#3: $x < -2 \vee x > 2$

Ответ: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Пример ([1], 9.022) Решить дробно-рациональное неравенство с модулем:

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < 3$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}\left(\left|\frac{3 \cdot x + 1}{x - 3}\right| < 3, x, \text{Real}\right)$

#3:

$$x < \frac{4}{3}$$

Ответ: $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$

Так же прекрасно решаются все виды иррациональных неравенств.

Пример ([1], 6.3.23) Решить неравенство:

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}(\sqrt{(24 - 10 \cdot x + x^2)} > x - 4, x, \text{Real})$

#3:

$$x < 4$$

Ответ: $(-\infty, 4)$

Возможности инструмента Solve Expression, по решению логарифмических неравенств, к сожалению, ограничиваются простейшими неравенствами.

3. Технология решения систем уравнений и неравенств

Пример ([1], 6.095) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Технология решения. Ввод уравнений одним вектором, и применение инструмента Solve Expression, после выделения в поле Solution Variables всех переменных, дает:

#2: $\text{SOLVE}([2 \cdot x + y + z = 7, x + 2 \cdot y + z = 8, x + y + 2 \cdot z = 9], [x, y, z], \text{Real})$

#3:

$$[x = 1 \wedge y = 2 \wedge z = 3]$$

Ответ: (1, 2, 3)

Пример ([1], 9.211) Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{4x - 7} < x, \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{5 - x} > 4 \end{cases}$$

Строки решения:

#2: $\text{SOLVE}([\sqrt{(4 \cdot x - 7)} < x, \sqrt{(x + 5)} + \sqrt{(5 - x)} > 4], x, \text{Real})$

#3:

$$\left[\frac{7}{4} \leq x < 4\right]$$

Ответ: $\left[\frac{7}{4}, 4\right)$

Системы можно решать и непосредственным вводом встроенной функции Solve, заключая уравнения (неравенства), как и неизвестные, в общие квадратные скобки.

Пример ([1], 9.211) Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x + 1| < 3. \end{cases}$$

Технология решения. В окно EE записывается задание:

`solve([abs(x^2-4x)<5, abs(x+1)<3], [x])`

Нажатие кнопки  возвращает:

#1:

$$[-1 < x < 2]$$

Ответ: $(-1, 2)$

Встроенная функция SOLUTIONS отличается от SOLVE тем, что возвращает корни уравнений в векторном виде, а решения систем уравнений в матричном.

Ниже приведена задача, в которой она оказывается полезной.

Задача. Найти все значения параметра q , при которых корни уравнения $x^2 - 2qx + 3q = 0$ принадлежат промежутку $(-1, 1)$.

Технология решения. Функцией SOLUTIONS находятся корни уравнения:

#1: `SOLUTIONS(x2 - 2·q·x + 3·q = 0, x)`

#2:

$$[\sqrt{q \cdot (q - 3)} + q, q - \sqrt{q \cdot (q - 3)}]$$

Из выделенной области видно, что больший корень первый, а меньший второй. Поэтому в окно EE записывается задание:

`solve([#2↓1<1, #2↓2>-1], q)`

Нажатие кнопки  возвращает:

#3: `SOLVE([$\frac{[\sqrt{q \cdot (q - 3)} + q, q - \sqrt{q \cdot (q - 3)}]_1}{1} < 1, \frac{[\sqrt{q \cdot (q - 3)} + q, q - \sqrt{q \cdot (q - 3)}]_2}{2} > -1$], q)`

#4:

$$[-\frac{1}{5} < q \leq 0]$$

Ответ: $(-\frac{1}{5}, 0]$

Инструмент Solve System

Команды Solve/System вызывают диалоговое окно Solve System Setup, в котором задается число компонент системы. После задания этого числа, и нажатия ОК, появляется диалоговое окно с полями для их ввода и указания неизвестных, которые надо выразить:

Пример ([1], 6.190). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = a, \\ yz = b, \quad abc > 0. \\ zx = c, \end{cases}$$

Технология решения. Вызывается, и заполняется, диалоговое окно Solve 3 equation(s):

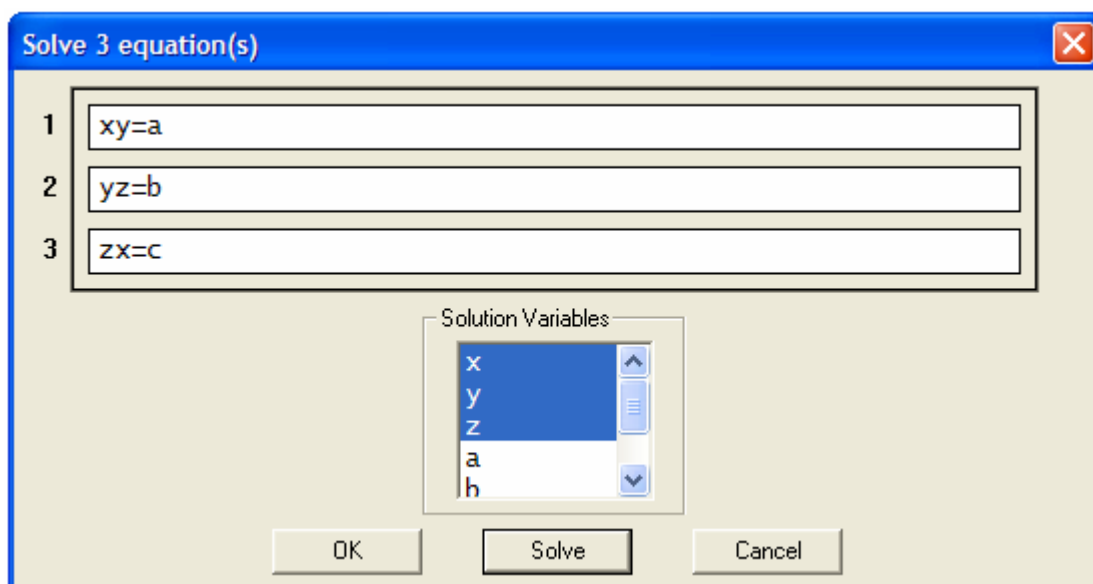


Рис. 1.25

Нажатие кнопки Solve вставляет на листовое поле:

#1: $\text{SOLVE}([x \cdot y = a, y \cdot z = b, z \cdot x = c], [x, y, z])$

#2:
$$\left[x = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}{b} \wedge y = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}{c} \wedge z = \frac{\sqrt{(b \cdot c)}}{\sqrt{a}}, x = - \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}{b} \right.$$

$$\left. \wedge y = - \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{(b \cdot c)}}{c} \wedge z = - \frac{\sqrt{(b \cdot c)}}{\sqrt{a}} \right]$$

Ответ: $x = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}, y = \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}, z = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

Пример ([1], 9.208). Решить систему неравенств: $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x - 1} \leq \sqrt{x^2 - 13}.$

Технология решения. Заполняется диалоговое окно Solve 2 equation(s):

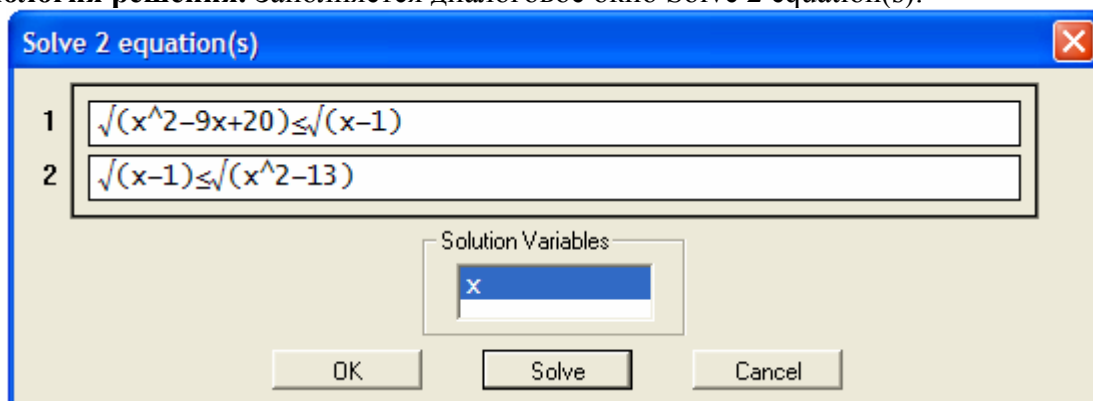


Рис. 1.26

Нажимается кнопка Solve, что дает:

#1: $\text{SOLVE}([\sqrt{(x^2 - 9 \cdot x + 20)} \leq \sqrt{(x - 1)}, \sqrt{(x - 1)} \leq \sqrt{(x^2 - 13)}], [x])$

#2: $[x = 4, 5 \leq x \leq 7]$

Ответ: $4 \cup [5, 7].$

Следует заметить, что найдено и изолированное решение $x=4$.

Инструменты Calculus

1. Кнопка \lim основной панели (рис. 1.1), когда на листовом поле выделена функция или ее идентификатор, вызывает инструмент Calculus Limit (рис. 1.27), предназначенный для вычисления предела функции в заданной точке.

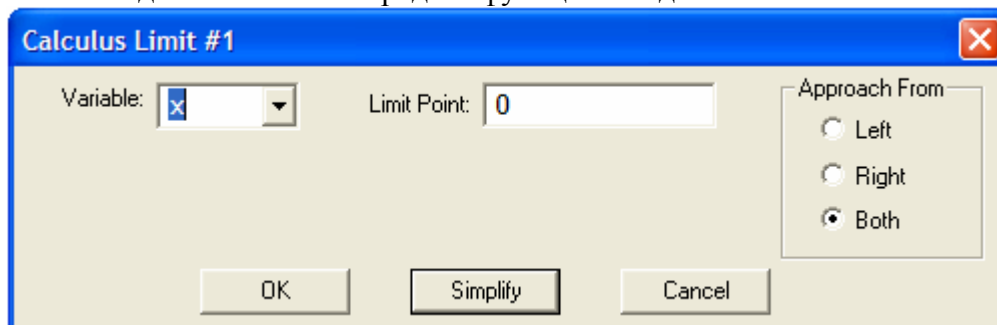


Рис. 1.27

Входящие параметры:

- Variable – переменная;
- Limit Point – предельная точка;
- Approach From – характер приближения.

Значения параметра Approach From:

- Left – слева;
- Right – справа;
- Both – двустороннее.

Кнопка OK вставляет на листовое поле встроенную функцию LIM, с заданными значениями параметров, возвращающую, после нажатия кнопки $=$, результат, а кнопка Simplify – и ее, и результат.

Пример ([1], 15.006). Вычислить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2 + 2x^3}.$$

Технология решения.

1. Вводится выражение, стоящее под знаком предела.
2. Вызывается инструмент Calculus Limit, и задаются значения параметров, как на рисунке 1.27.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает:

#2:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 + 3 \cdot x^4)} - \sqrt{(1 - 2 \cdot x)}}{x + x^2 + 2 \cdot x^3}$$

#3:

1

Ответ: 1.

Конструкция ввода встроенной функции, возвращающей значение предела:

LIM(функция, переменная, точка, σ).

Параметр σ принимает одно из значений: -1, 1, 0. Значению -1 соответствует левосторонний предел, 1 – правосторонний предел, 0 – двусторонний предел. В последнем случае, параметр σ можно не вводить.

2. Кнопка $\frac{d}{dx}$ основной панели, когда на листовом поле выделена функция или ее идентификатор, вызывает инструмент Calculus Differentiate вычисления производных:

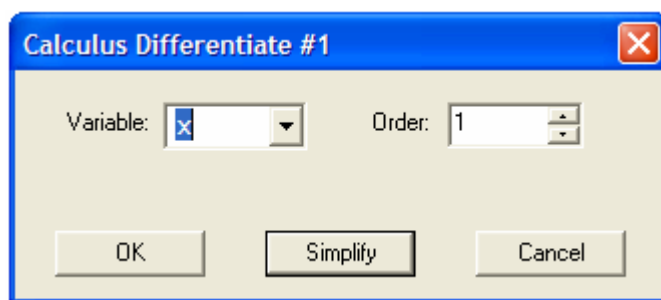


Рис. 1.28

Входящие параметры:

- Variable – переменная дифференцирования;
- Order – порядок производной.

Кнопка ОК вставляет на листовое поле встроенную функцию DIF, с заданными значениями параметров, возвращающую, после нажатия кнопки $\frac{d}{dx}$, производную, а кнопка Simplify – и ее, и производную.

Пример ([1], 15.020) Найти производную функции

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

Технология решения.

1. Вводится заданная функция:

#1:
$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

2. Вызывается инструмент Calculus Differentiate, и задаются значения параметров, как на рисунке 2.28.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает:

#2:
$$\frac{d}{dx} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$$

#3:
$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2}$$

Встроенная функция TANGENT (y, x, x_0) возвращает правую часть уравнения касательной $y = kx + b$ к графику функции $y = y(x)$, проходящей через точку с абсциссой x_0 .

Пример ([1], 15.101) Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке $x = -2$.


Технология решения.

1. В окне ЕЕ записывается задание: TANGENT(2-4x-3x^2,x, -2).
2. Нажатие кнопки $\frac{d}{dx}$ дает:

#1: TANGENT(2 - 4x - 3x^2, x, -2)

#2: $8x + 14$

Ответ: $y = 8x + 14$

3. Кнопка  основной панели вызывает инструмент Calculus Integrate:

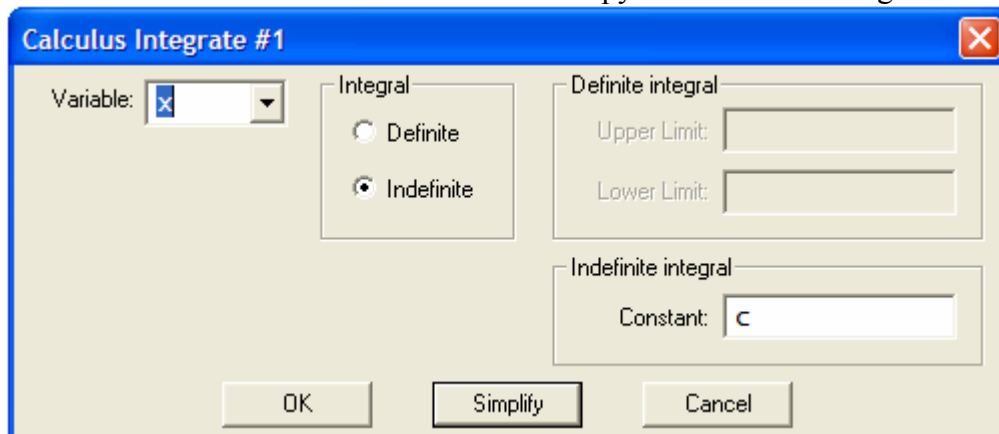


Рис. 1.29



Им вычисляются как неопределенные интегралы (Indefinite) - первообразные, так и определенные интегралы (Definite). В последнем случае открываются поля Definite integral, в которые вводятся нижний и верхний пределы интегрирования.

Пример ([1], 15.269). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Технология решения.

1. Ввод на листовое поле:

#1:
$$\left[\begin{matrix} 3 & 3 \\ x & \sqrt{x} \end{matrix} , x \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 0 \leq x \leq 1 \right]$$

2. Кнопкой  вызывается геометрическое окно 2D-plot и, нажатием кнопки , строится заданная фигура:

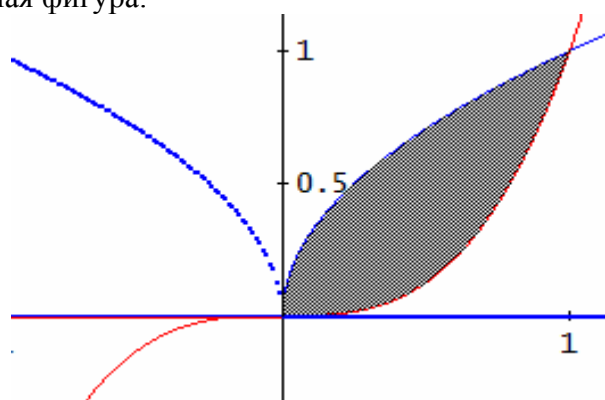



Рис. 1.30

3. Кнопкой  делается переход в алгебраическое окно, где вводится:

#2:
$$\sqrt{x} - x^3$$

4. Инструментом Calculus Integrate вычисляется площадь фигуры:

#3:
$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx$$

#4:

$$\frac{5}{12}$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Встроенные функции интегрирования $\text{INT}(f(x), x)$ и $\text{INT}(f(x), x, a, b)$, первой вычисляются неопределенные интегралы, второй – определенные.

Инструменты Calculus Sum/Product

Кнопка Σ основной панели (рис. 1.1) вызывает инструмент Calculus Sum:

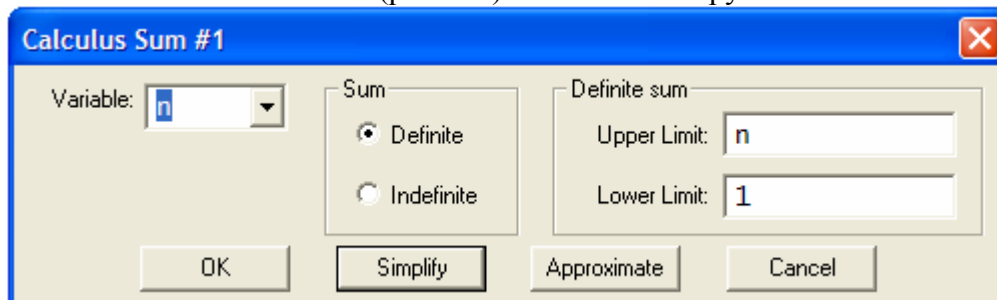


Рис. 1.31

Технология вычисления им суммы первых пятидесяти четных натуральных чисел.

1. Ввод суммируемого выражения $2n$.
2. Вызов инструмента Calculus Sum и установка нижнего предела суммирования Lower Limit: 1, верхний предел суммирования Upper Limit: 50.
3. Нажатие кнопки Simplify возвращает искомое значение:

#1: $2 \cdot n$

#2:
$$\sum_{n=1}^{50} 2 \cdot n$$

#3: 2550

Суммировать можно не только числовые, но и символьные данные.

Конструкция ввода встроенной функции суммирования:

$\text{SUM}(f, k, \text{kmin}, \text{kmax})$.

Вместо SUM можно вставить символ Σ .

Функция SUM прекрасно встраивается в функцию Solve.

Задача ([1], 4.041). Найти целое положительное n из уравнения

$$(3 + 6 + 9 + \dots + 3(n-1)) + (4 + 5,5 + 7 + \dots + \frac{8+3n}{2}) = 137$$

Строки решения:

#1:
$$\text{SOLVE}\left(\left[\sum_{k=2}^n 3 \cdot (k-1)\right] + \sum_{k=0}^n \frac{8+3 \cdot k}{2} = 137, n\right)$$

#2: $n = -\frac{76}{9} \vee n = 7$

Ответ: 7.

Задача ([1], 4.061) Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3$$

Строки решения:

#1: $\text{SOLVE} \left(\sum_{k=1}^{x-1} \frac{x-k}{x} = 3, x \right)$

#2:

$x = 7$

Ответ: 7.

Кнопка \prod основной панели (рис. 1.1) вызывает инструмент Calculus Product:

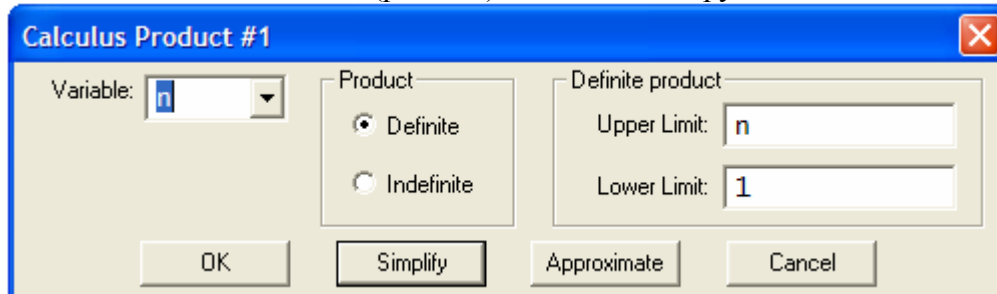


Рис. 1.32

Пусть надо найти произведение первых десяти четных натуральных чисел.

1. Вводится $2n$.
2. Вызывается инструмент Calculus Product и устанавливаются следующие пределы
Lower Limit: 1, Upper Limit: 10.
4. Нажатие кнопки Simplify возвращает результат:

#1: $2 \cdot n$

#2: $\prod_{n=1}^{10} 2 \cdot n$

#3:

3715891200